Lycée Pierre CORNEILLE **MP**
ANNÉE SCOLAIRE 2018/2019

Composition de Mathématiques

Le 26 septembre 2018 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

Dans tout le problème, on note I, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ de longueur strictement positive (c'est-à-dire : ni vide, ni réduit à un point).

Partie A.

Dans cette partie, on considère une fonction f de I dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I.

1. On suppose qu'il existe trois points

$$a < b < c$$

dans I tels que

$$f(a) = f(b) = f(c) = 0.$$

1. a. Démontrer qu'il existe $d \in I$ tel que $f''(d) = 0$.
1. b. Illustrer cette propriété par une figure.
2. On suppose qu'il existe deux points $a < b$ dans I tels que

$$f(a) = f'(a) = f(b) = 0.$$

2. a. Démontrer qu'il existe $d \in I$ tel que $f''(d) = 0$.
2. b. Illustrer cette propriété par une figure.
3. Démontrer qu'une application $\psi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction affine si, et seulement si,

$$\psi\big[(1-t)x + ty\big] = (1-t)\psi(x) + t\psi(y)$$

quels que soient x et y dans I et $t \in [0,1]$.
4. Soient K, un réel quelconque et g, la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - K(x-a)^2.$$

4. a. Calculer $g(a)$, $g'(a)$ et $g(b)$.
4. b. En choisissant une valeur particulière de K, en déduire qu'il existe un réel $d \in I$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\, f''(d).$$

Cette relation s'appelle l'*égalité de Lagrange à l'ordre* 2.
4. c. Quel théorème du cours l'égalité de Lagrange généralise-t-elle ?
4. d. L'égalité de Lagrange peut aussi s'écrire sous la forme suivante.

$$\frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)}{b-a} = \frac{1}{2}\, f''(d)$$

Commenter cette expression en la rattachant au cours.
5. On considère trois points $a < b < c$ de l'intervalle I.
5. a. Que dire du graphe de la fonction $T : I \to \mathbb{R}$ définie par la relation suivante ?

$$T(x) = \frac{b-x}{b-a}\, f(a) + \frac{x-a}{b-a}\, f(b)$$

5. b. Soient K, un réel quelconque et φ, la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - T(x) - K(x-a)(x-b).$$

Calculer $\varphi''(x)$, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, puis choisir K pour que $\varphi(c) = 0$.
5. c. Pour le choix précédent de la constante K, démontrer (presque) *sans calculs* que

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c)$$

pour tout $x \in I$.
5. d. Démontrer qu'il existe un réel $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(b-a)(c-a)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}.$$

Partie B.

Dans cette partie, on considère une fonction f à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$ et on note m, le milieu de ce segment :

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Pour toute fonction g continue sur le segment $[a,b]$, on pose

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \big|g(x)\big|.$$

On *admettra* que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
6. a. Étudier les variations de la fonction φ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \varphi(x) = x(1-x)$$

et tracer l'allure de son graphe.

6. b. Calculer l'intégrale suivante.

$$\int_0^1 x(1-x)\,dx$$

6. c. En déduire que

$$\forall\, a<b,\quad \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

7. À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer qu'il existe un réel $\gamma_0 \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(\gamma_0).$$

8. a. Un théorème démontre qu'il existe un, et un seul, polynôme S de degré inférieur à 2 tel que

$$S(a)=f(a),\quad S(m)=f(m)\quad \text{et}\quad S(b)=f(b).$$

Citer précisément ce théorème et donner l'expression du polynôme S.

8. b. Démontrer que

$$\int_a^b S(t)\,dt = (b-a)\Big[\frac{1}{6}f(a)+\frac{2}{3}f(m)+\frac{1}{6}f(b)\Big].$$

8. c. En déduire qu'il existe un réel $\gamma_1 \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b S(t)\,dt = (b-a)f(\gamma_1).$$

☞ *On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.*

9. Pour tout $x \in [a,b]$, on pose

$$\varphi(x) = f(x) - S(x).$$

9. a. Calculer $\varphi(a)$, $\varphi(m)$ et $\varphi(b)$.

9. b. En déduire que $\|\varphi''\|_\infty \leqslant 2\|f''\|_\infty$.

10. Pour $x \in [a,m]$, on pose

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \|f''\|_\infty (x-a)(m-x)$$
$$\psi_2(x) = \varphi(x) + \|f''\|_\infty (x-a)(m-x).$$

10. a. Étudier la convexité de ψ_1 et de ψ_2.

10. b. En déduire que ψ_1 est négative sur $[a,m]$ et que ψ_2 est positive sur $[a,m]$.

10. c. Démontrer que

$$\left|\int_a^m \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(m-a)^3}{6}\,\|f''\|_\infty.$$

11. Démontrer

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24}\,\|f''\|_\infty.$$

Partie C.

Dans cette partie, on exploite l'estimation démontrée au **11.** pour calculer une valeur approchée aussi précise que possible de l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2n,\quad \alpha_k = \Big(1-\frac{k}{2n}\Big)a + \frac{k}{2n}b$$

ainsi que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{6n}\big[f(\alpha_{2k}) + 4f(\alpha_{2k+1}) + f(\alpha_{2k+2})\big].$$

12. Expliquer pourquoi il est intéressant de comparer la somme S_n à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On limitera les calculs au minimum nécessaire pour exposer des arguments clairs.

13. Déduire du **11.** que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty\,(b-a)^3}{24n^2}.$$

Comparer la qualité de cette approximation avec celle de la méthode des rectangles.

REMARQUE.— Une étude plus fine (en supposant la fonction f de classe $\mathscr{C}^4$) permet de démontrer que cette erreur est en fait $\mathcal{O}(1/n^4)$...

14. Démontrer que

$$S_n = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_{2i+1})\right].$$

15. Écrire une fonction d'en-tête

```
def integrale(f, a, b, n):
```

qui retourne la valeur de S_n.

Solution ❁ Études lagrangiennes

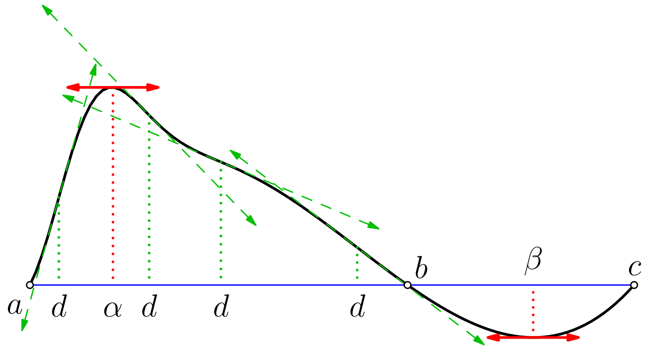
Partie A.

1. a. La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle I. D'après le Théorème de Rolle, comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

En appliquant de même ce théorème entre b et c, il existe $\beta \in]b, c[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

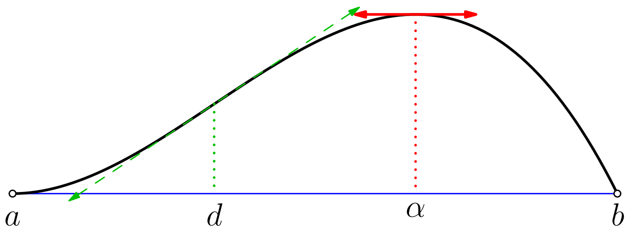
Comme $\alpha < b < \beta$, on peut encore appliquer ce théorème à la fonction f' (qui est dérivable sur I par hypothèse) entre α et β : il existe donc $d \in]\alpha, \beta[$ tel que $(f')'(d) = 0$.

1. b. Le raisonnement précédent montre que le graphe de f présente (au moins) deux tangentes horizontales et un point d'inflexion entre les abscisses a et c.



2. a. On applique encore le Théorème de Rolle entre a et b : il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Comme $a < \alpha$ et que f' est dérivable sur I, on peut appliquer une fois encore le Théorème de Rolle entre a et α : il existe $d \in]a, \alpha[$ tel que $(f')'(d) = 0$.

2. b. Même interprétation géométrique, mais cette fois, on sait que le graphe présente une tangente horizontale au point d'abscisse a.



3. Si la fonction ψ est affine, alors elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est identiquement nulle. Cette fonction est donc simultanément convexe (dérivée seconde positive) et concave (dérivée seconde négative). Par double inégalité, on en déduit que

$$\psi\big[(1-t)x + ty\big] = (1-t)\psi(x) + t\psi(y)$$

quels que soient x et y dans I et $t \in [0, 1]$.

❧ Réciproquement, on considère pour commencer un segment $[a, b]$ contenu dans l'intervalle I. Quel que soit $x \in [a, b]$, on a

$$x = (1-t)a + tb \quad \text{avec} \quad t = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1].$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé, on en déduit que

$$\psi(x) = a + \frac{x-a}{b-a}\big[\psi(b) - \psi(a)\big]$$

et donc que ψ est affine sur le segment $[a, b]$. On en déduit que ψ est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et que sa dérivée seconde est identiquement nulle sur cet intervalle.

Comme le raisonnement précédent est valable pour *tout* segment $[a, b] \subset I$ et que l'intervalle I est ouvert, on en déduit que f est deux fois dérivable sur I et que sa dérivée seconde est nulle sur I et donc finalement que f est affine sur I.

4. a. Comme f est deux fois dérivable et qu'une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction g est deux fois dérivable.

Il est clair que $g(a) = 0$ et que

$$g(b) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - K(b-a)^2.$$

Enfin, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - 2K(a-x)$$

donc $g'(a) = 0$.

4. b. D'après la question précédente, $g(b) = 0$ si, et seulement si,

$$K = \frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{(b-a)^2}$$

(il s'agit de résoudre une équation du premier degré en K...). Comme g est deux fois dérivable et que, pour ce choix de K, on a

$$g(a) = g(b) = g'(a) = 0,$$

on peut appliquer le résultat établi en **2.a.** : il existe $d \in I$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f''(d).$$

4. c. D'après le théorème des accroissements finis, pour une fonction dérivable sur I, il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\gamma)$$

c'est-à-dire

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\gamma).$$

L'égalité de Lagrange est donc une généralisation de l'égalité des accroissements finis.

4. d. Si la fonction f est convexe, sa dérivée f' est croissante. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $a < \gamma < b$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\gamma) \geqslant f'(a)$$

et comme $(b-a) > 0$, on en déduit que $f''(d) \geqslant 0$, ce qui est cohérent avec la convexité de f.

5. a. Comme la fonction T est *affine*, son graphe est une droite. Comme $T(a) = f(a)$ et $T(b) = f(b)$, cette droite est la droite qui passe par les points de coordonnées

$$\big(a, f(a)\big) \quad \text{et} \quad \big(b, f(b)\big).$$

du graphe de f.

5. b. Comme f est supposée deux fois dérivable et que φ diffère de f par une fonction polynomiale, la fonction φ est aussi deux fois dérivable et

$$\varphi''(x) = f''(x) - T''(x) - 2K = f''(x) - 2K$$

(puisque T est affine).

Comme $T(a) = f(a)$ et $T(b) = f(b)$, alors

$$\begin{cases} \varphi(a) = -K(a-a)(a-b) = 0, \\ \varphi(b) = -K(b-a)(b-b) = 0. \end{cases}$$

Comme $a < b < c$, alors $(c-a)(c-b) > 0$ et comme

$$\varphi(c) = f(c) - T(c) - K(c-a)(c-b),$$

on en déduit que : $\varphi(c) = 0$ si, et seulement si,

$$K = \frac{f(c) - T(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{(c-b)f(a) + (a-c)f(b) + (b-a)f(c)}{(b-a)(c-a)(c-b)}.$$

5. c. Il est clair sur la définition de φ que la différence $f - \varphi$ est une fonction polynomiale dont le degré est inférieur à deux. Le choix précédent de K prouve que

$$\forall\, x \in \{a, b, c\}, \quad f(x) - \varphi(x) = f(x)$$

donc $f - \varphi$ est un polynôme interpolateur associé aux points

$$\big(a, f(a)\big), \quad \big(b, f(b)\big) \quad \text{et} \quad \big(c, f(c)\big).$$

Le *cours* sur les polynômes interpolateurs de Lagrange permet d'écrire l'expression de $f - \varphi$ sans calculs...

5. d. Comme φ est deux fois dérivable sur I et que

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0,$$

il existe $d \in I$ tel que $\varphi''(d) = 0$ d'après **1.a.** Or, d'après **5.b.**,

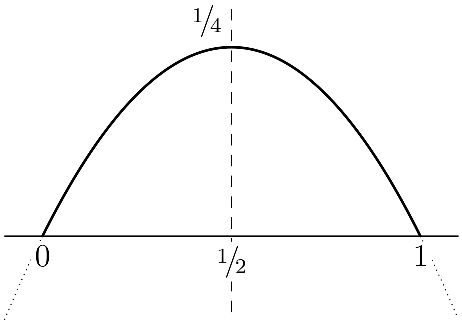
$$\varphi''(d) = f''(d) - 2K$$

et donc, d'après la valeur de K choisie au **5.b.**,

$$\frac{f(a)}{(b-a)(c-a)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}.$$

Partie B.

6. a. La fonction φ est un polynôme de degré 2, dont les racines sont 0 et 1. Le graphe de φ est une parabole, tournée vers le bas (le coefficient de x^2 est négatif) et qui admet $x = 1/2$ pour axe de symétrie (le milieu des racines).



6. b. L'intégrale de φ est égale à $1/6$.

6. c. On se ramène à l'intégrale précédente par deux changements de variable simples :

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx &= \int_a^b (x-a)[(b-a)-(x-a)]\,dx \\ &= \int_0^{b-a} y[(b-a)-y]\,dy \\ &= (b-a)^3 \int_0^1 z(1-z)\,dz \\ &= \frac{(b-a)^3}{6} \end{aligned}$$

avec $y = x - a$ (et donc $dy = dx$) et

$$z = (b-a)y = (b-a)(x-a) \quad \text{et} \quad dz = (b-a)\,dy.$$

7. La fonction f étant continue sur l'intervalle I, elle possède une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et, d'après le Théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut lui appliquer le Théorème de Rolle : il existe $\gamma_0 \in [a, b]$ tel que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\gamma_0) = f(\gamma_0)$$

et donc tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(\gamma_0).$$

8. a. D'après le Théorème d'interpolation polynomiale, étant données $(n+1)$ abscisses

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

et $(n+1)$ ordonnées quelconques

$$y_0, y_1, \cdots, y_n$$

il existe un, et un seul, polynôme S de degré inférieur à n tel que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad S(x_k) = y_k.$$

On applique ici ce théorème à $n = 2$, avec

$$\begin{cases} (x_0, x_1, x_2) = (\ \ a,\ \ m,\ \ b) \\ (y_0, y_1, y_2) = \big(\ f(a),\ f(m),\ f(b)\big). \end{cases}$$

Comme on l'a vu plus haut (**5.c.**), $S(x) = f(x) - \varphi(x)$ pour tout $x \in I$ en remplaçant seulement c par m.

8. b. On déduit de l'expression de S et de la linéarité de l'intégrale (on intègre des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$) que

$$\begin{aligned} \int_a^b S(t)\,dt = \frac{f(a)}{(a-b)(a-m)} &\int_a^b (x-b)(x-m)\,dx \\ + \frac{f(b)}{(b-a)(b-m)} &\int_a^b (x-a)(x-m)\,dx \\ + \frac{f(m)}{(m-a)(m-b)} &\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx. \end{aligned}$$

Comme $m = (a+b)/2$, on a

$$(a-b)(a-m) = (b-a)(b-m) = \frac{(b-a)^2}{2}$$

et

$$(m-a)(m-b) = \frac{-(b-a)^2}{4}.$$

En remarquant que

$$(x-b)(x-m) = (x-b)(x-a) + (a-m)(x-b),$$

on obtient en tenant compte de **6.c.** :

$$\int_a^b (x-b)(x-m)\,dx = \frac{(b-a)^3}{12}$$

et, de même, en remarquant que

$$(x-a)(x-m) = (x-a)(x-b) + (b-m)(x-a),$$

on obtient

$$\int_a^b (x-a)(x-m)\,dx = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

On en déduit la valeur de l'intégrale de f.

8. c. On vient d'exprimer la valeur moyenne de S comme une combinaison convexe de $f(a)$, $f(m)$ et $f(b)$ puisque

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

La fonction f est continue sur $[a,b]$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[a,b]$ par f est un intervalle J, qui contient évidemment $f(a)$, $f(m)$ et $f(b)$. On sait que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, donc l'intervalle $J = f_*([a,b])$ contient la combinaison convexe

$$\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(m) + \frac{1}{6}f(b).$$

Ainsi, il existe $\gamma_1 \in [a,b]$ tel que

$$f(\gamma_1) = \frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(m) + \frac{1}{6}f(b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b S(t)\,dt.$$

9. a. Par **8.a.**, il est clair que

$$\varphi(a) = \varphi(m) = \varphi(b) = 0.$$

9. b. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et la fonction S est polynomiale, donc φ est aussi de classe $\mathscr{C}^2$. Comme le degré de S est inférieur à 2, il existe une constante K telle que

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi''(x) = f''(x) - S''(x) = f''(x) - K.$$

D'après **9.a.**, on peut appliquer le résultat du **2.a.** à la fonction φ. Il existe donc $d \in [a,b]$ tel que

$$f''(d) - K = \varphi''(d) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \varphi''(x) = f''(x) - f''(d)$$

et par conséquent que

$$\forall\, x \in [a,b], \quad \left|\varphi''(x)\right| \leqslant \left|f''(x)\right| + \left|f''(d)\right| \leqslant 2\|f''\|_\infty.$$

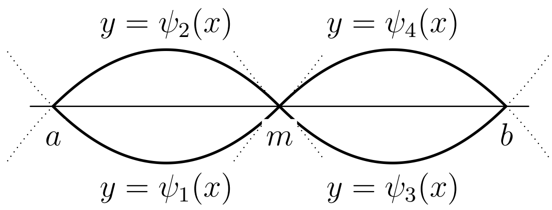
Le majorant ne dépendant pas de x, on peut passer au sup pour obtenir :

$$\|\varphi''\|_\infty \leqslant 2\|f''\|_\infty.$$

10. a. On a démontré **9.b.** que la fonction φ était de classe $\mathscr{C}^2$. En tant que sommes de φ et de fonctions polynomiales, les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$ et, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\psi_1''(x) = \varphi''(x) + 2\|f''\|_\infty \geqslant 0$$
$$\psi_2''(x) = \varphi''(x) - 2\|f''\|_\infty \leqslant 0$$

d'après l'encadrement établi au **9.b.**



On en déduit que ψ_1 est convexe et que ψ_2 est concave sur $[a,b]$.

10. b. Par **9.a.**,

$$\psi_1(a) = \psi_2(a) = \varphi(a) = \psi_1(m) = \psi_2(m) = \varphi(m) = 0.$$

L'axe des abscisses $[y=0]$ est donc la droite qui coupe les graphes de ψ_1 et de ψ_2 aux points d'abscisses a et m. Or l'arc du graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est situé au-dessous (resp. au-dessus) de la sécante qui le définit. Par conséquent,

$$\forall\, x \in [a,m], \quad \psi_1(x) \leqslant 0 \leqslant \psi_2(x).$$

10. c. D'après l'inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_a^m \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^m \left|\varphi(x)\right|\,dx.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in [a,m], \quad \left|\varphi(x)\right| \leqslant \|f''\|_\infty (x-a)(m-x)$$

et on déduit alors de **6.c.** (en remplaçant b par m) que

$$\left|\int_a^m \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(m-a)^3}{6}\,\|f''\|_\infty.$$

11. On raisonne de manière analogue sur le segment $[m,b]$ au moyen des fonctions définies par

$$\psi_3(x) = \varphi(x) - \|f''\|_\infty (x-m)(b-x)$$
$$\psi_4(x) = \varphi(x) + \|f''\|_\infty (x-m)(b-x)$$

pour tout $x \in [m,b]$. Un argument de convexité permet de démontrer, comme plus haut, que

$$\forall\, x \in [m,b], \quad \psi_3(x) \leqslant 0 \leqslant \psi_4(x)$$

et d'en déduire ensuite que

$$\left|\int_m^b \varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(b-m)^3}{6}\,\|f''\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^m \varphi(x)\,dx + \int_m^b \varphi(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^m \varphi(x)\,dx\,dx\right| + \left|\int_m^b \varphi(x)\,dx\right| \\ &\leqslant 2\|f''\|_\infty\,\frac{(b-a)^3}{6\times 2^3} = \frac{(b-a)^3}{24}\,\|f''\|_\infty\end{aligned}$$

puisque $(b-m) = (m-a) = (b-a)/2$.

Partie C.

12. Dans la partie précédente, on a comparé l'intégrale

$$\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+2}} f(x)\,dx$$

à l'expression

$$I_k = \frac{\alpha_{2k+2}-\alpha_{2k}}{6}\big[f(\alpha_{2k} + 4f(\alpha_{2k+1}) + f(\alpha_{2k+2})\big].$$

En sommant ces expressions, on est amené à comparer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+2}} f(x)\,dx$$

à la somme S_n puisque

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \alpha_{2k+2} - \alpha_{2k} = \frac{b-a}{n}.$$

13. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k$$

où on a posé

$$\Delta_k = \int_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k+2}} f(x)\,dx - I_k,$$

et d'après **11.**,

$$\begin{aligned}|\Delta_k| &\leqslant \frac{(\alpha_{2k+2}-\alpha_{2k})^3}{24}\sup_{x\in[\alpha_{2k},\alpha_{2k+2}]}|f''(x)| \\ &\leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|.\end{aligned}$$

Comme la somme compte n termes égaux, on en déduit que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty\,(b-a)^3}{24n^2}.$$

REMARQUE.— On sait que l'erreur commise avec la méthode des rectangles est $\mathcal{O}(1/n)$: la **méthode de Simpson** qui vient d'être décrite ici est donc plus efficace.

On sait également que l'erreur commise avec la méthode des trapèzes est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et donc du même ordre de grandeur que notre estimation. La remarque faite par l'énoncé montre que la méthode de Simpson est plus efficace que la méthode des trapèzes.

14. Il suffit de constater les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{2k}) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_{2k})$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{2k+2}) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_{2k}) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_{2k}) + f(b)$$

puisque $\alpha_0 = a$ et $\alpha_{2n} = b$.

15. On s'inspire de l'expression établie à la question précédente pour limiter les calculs au minimum.

Voici un code python possible.

```
import numpy as np

def integrale(f, a, b, n):
  S, nn = 0, 2*n
  alpha = np.linspace(a, b, 2*n+1)[1:-1]
  for x in alpha[::2]:
    S += f(x)
  S *= 2
  for x in alpha[1::2]:
    S += f(x)
  S *= 2
  S += f(a)+f(b)
  return (b-a)*S/(6*n)
```

Quelques rappels :

La commande `linspace` découpe le segment $[a,b]$ en $2n$ intervalles de même longueur en définissant les réels

$$a = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n} = b.$$

On retire le premier et le dernier élément de cette liste avec le suffixe `[1:-1]`. Il reste donc

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}$$

où on doit remarquer que la valeur α_k est située en $(k-1)$-ième position.

La tranche `alpha[::2]` extrait un élément sur deux de `alpha` en partant du rang 0. Cette tranche contient donc les valeurs d'indices impairs :

$$\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-3}, \alpha_{2n-1}.$$

La tranche `alpha[1::2]` extrait un élément sur deux de `alpha` en partant du rang 1. Cette tranche contient donc les valeurs d'indices pairs :

$$\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-4}, \alpha_{2n-2}.$$

- Justification et efficacité du code :
  La variable S prend ici les valeurs suivantes.

$$
\begin{aligned}
&S \leftarrow 0\\
&S \leftarrow \sum_{k\leftarrow 0}^{n-1} f(\alpha_{2k+1})\\
&S \leftarrow 2\sum_{k\leftarrow 0}^{n-1} f(\alpha_{2k+1})\\
&S \leftarrow \sum_{k\leftarrow 1}^{n-1} f(\alpha_{2k}) + 2\sum_{k\leftarrow 0}^{n-1} f(\alpha_{2k+1})\\
&S \leftarrow 2\Big[\sum_{k\leftarrow 1}^{n-1} f(\alpha_{2k}) + 2\sum_{k\leftarrow 0}^{n-1} f(\alpha_{2k+1})\Big]\\
&S \leftarrow f(a) + f(b) + 2\sum \cdots + 4\sum \cdots
\end{aligned}
$$

De cette manière, on évalue $2n+1$ fois la fonction f et le nombre de multiplications est indépendant de n. Il est important de noter qu'en suivant littéralement la définition de S_n, on évaluerait $3n$ fois la fonction f et que le nombre de multiplications serait proportionnel à n !

- Exemples :
  Avec $n = 10$, on trouve

$$\int_0^1 e^t \, dt \approx 1,718\,281\,888\,103\,857.$$

Avec $n = 20$, on trouve

$$\int_0^{\pi} \sin t \, dt \approx 2,000\,000\,423\,093\,182.$$

Avec $n = 50$,

$$\int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = -\ln\cos\frac{\pi}{4} \approx 0,346\,573\,590\,576$$

(soit neuf décimales exactes !).