

Composition de Mathématiques

Le 11 octobre 2017 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

Rappel. On admettra que

$$\forall \alpha > 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❖ I – Exercice ❖

On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et on pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille

$$\left(\frac{1}{p^2 q^2} \right)_{(p,q) \in I}$$

est sommable et calculer sa somme.

2. Démontrer que la famille

$$\left(\frac{1}{p^2 + q^2} \right)_{(p,q) \in I}$$

n'est pas sommable.

❖ II – Exercice ❖

On considère la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$$

On rappelle le **développement d'Euler** : lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

On pourra utiliser librement cette relation.

1. La règle de D'Alembert permet-elle de démontrer la convergence de la série $\sum v_n$?

2. Calculer un développement asymptotique de $\ln(v_{n+1}/v_n)$ à $\mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$v_n \sim \frac{K}{n\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

4. La formule de Stirling permet-elle de préciser la valeur de la constante K ?

5. En vérifiant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1},$$

calculer la somme de la série $\sum v_n$.

❖ III – Exercice ❖

Le plan est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soient A et B , deux points distincts du plan.

1. Démontrer que le point M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$ si, et seulement si, le produit scalaire

$$\langle AM | BM \rangle$$

est nul.

2. Comment caractériser les points du plan qui sont situés à l'intérieur de ce cercle ?

❖ IV – Problème ❖

On sait que la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est convergente, ce qui signifie que ses sommes partielles

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

convergent vers un réel S (égal à $\pi^2/6$, mais ceci est une autre histoire). Nous allons voir comment calculer une valeur approchée de S en limitant au minimum les calculs.

Partie A. Estimations

1.a. Proposer une fonction $S(n)$ écrite en langage Python dont l'argument n est un entier naturel $n \geq 1$ et qui retourne la valeur de la somme partielle u_n .

- 1. b. Compter, en fonction de n , le nombre d'opérations effectuées lors de l'exécution de $S(n)$.
- 1. c. Quel doit être l'ordre de grandeur de l'entier n pour que U_n soit une valeur approchée de S à 10^{-3} près ?

Partie B. Accélération de convergence

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$V_n = U_n + \frac{1}{n}.$$

- 2. Expliquer (sans le moindre calcul) pourquoi V_n est plus proche de S que U_n .
- 3. Expliciter la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

- 4. Calculer un équivalent de v_k lorsque k tend vers $+\infty$.
- 5. En déduire que

$$S - V_n \sim \frac{-1}{2n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- 6. On pose maintenant

$$\forall n \geq 1, \quad W_n = V_n - \frac{1}{2n^2}.$$

- 6. a. Expliciter la suite $(w_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad W_n = \sum_{k=1}^n w_k.$$

- 6. b. En déduire que

$$S - W_n \sim \frac{1}{6n^3}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

- 7. Expliquer sommairement comment définir une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$S - X_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

On peut poursuivre les calculs en suivant la même procédure et obtenir par exemple :

$$S - S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} + \frac{1}{42n^7} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Exploitation des résultats

- 8. Proposer deux fonctions $v(n)$ et $w(n)$, écrites en langage Python, dont l'argument est un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui retournent respectivement V_n et W_n .
- 9. On suppose connue une troisième fonction $x(n)$ qui retourne la valeur de X_n définie au 7. et on donne la fonction suivante.

```
def erreur(v, ve):
    return 100*(v-ve)/ve
```

- 9. a. Expliquer le sens de la valeur retournée par l'instruction `erreur(x, x0)`. On interprétera en particulier le signe de cette valeur.
- 9. b. On considère le code Python suivant.

```
from math import pi

N = 10000
x0 = pi**2/6
L = [ S(N), v(N), w(N), x(N) ]
for x in L:
    print(x, erreur(x, x0))
```

L'exécution de ce code donne le tableau suivant.

Somme partielle	Erreur
1,644834071848065	-0,006078967064804067
1,644934071848065	3,0395373552964336e-07
1,644934066848065	-9,813550040324634e-12
1,6449340668482317	3,2396863957055187e-13

Commenter ces résultats.

❖ **V – Problème** ❖

On note $I =]-1, +\infty[$ et $I^* = I \setminus \{0\}$. On étudie ici la fonction f définie par $f(0) = 1$ et par

$$\forall x \in I^*, \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x(1+x)}.$$

On rappelle que la série de Poisson $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge absolument pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda.$$

- 1. Dans cette question, on étudie la fonction φ définie par

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x).$$

- 1. a. Calculer la dérivée φ' . Préciser la valeur de $\varphi'(0)$ et la limite de φ' au voisinage de $+\infty$.
- 1. b. Calculer la dérivée seconde φ'' . Préciser la valeur de $\varphi''(0)$.
- 1. c. En déduire le tableau des variations de φ . Que dire du signe de φ ?
- 1. d. Tracer l'allure du graphe de φ .
- 2. Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I^* .
- 3. a. Calculer le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de f .
- 3. b. La fonction f est-elle continue en 0? dérivable en 0?
- 3. c. En étudiant $f'(x)$ au voisinage de $x = 0$, démontrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- 4. a. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

- 4. b. Expliciter une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- 4. c. Démontrer que la suite $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle.
- 4. d. En déduire que la série $\sum a_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $|x| < 1$.

Solution I ✿ Exercice

Dans tout l'exercice, on considère la partition

$$I = \bigsqcup_{q \in \mathbb{N}^*} I_q$$

où $I_q = \{(p, q), p \in \mathbb{N}^*\}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $(p, q) \in I$, on pose

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^2 q^2}.$$

On fixe $q \in \mathbb{N}^*$. Lorsque p tend vers $+\infty$,

$$u_{p,q} = \mathcal{O}(1/p^2).$$

Comme la série (de Riemann) $\sum 1/p^2$ est une série convergente de terme général positif, on en déduit que la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in I_q}$ est sommable. On peut donc poser

$$\sigma_q = \sum_{(p,q) \in I_q} u_{p,q} = \frac{1}{q^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6q^2}.$$

Comme précédemment, la série $\sum \sigma_q$ est convergente. On déduit alors du théorème de Fubini que la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est sommable et que

$$\sum_{(p,q) \in I} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q = \left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^4}{36}.$$

2. Pour tout $(p, q) \in I$, on pose cette fois

$$v_{p,q} = \frac{1}{p^2 + q^2} > 0$$

Nous allons appliquer le premier théorème de Fubini, qui caractérise les familles sommables de réels positifs.

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{p,q} \sim \frac{1}{p^2}$$

lorsque p tend vers $+\infty$, donc la famille $(v_{p,q})_{(p,q) \in I_q}$ est sommable.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(v_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est alors sommable si, et seulement si, la série de terme général (positif)

$$s_q = \sum_{(p,q) \in I_q} v_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + q^2}$$

est convergente.

✿ **Première méthode.** Il est clair que

$$\forall (p, q) \in I, \quad (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \geq p^2 + q^2 > 0$$

et donc que

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad s_q \geq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

En comparant sommes et intégrales, on sait que

$$\sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{q}$$

lorsque q tend vers $+\infty$. Comme $\sum 1/q$ est une série divergente de terme général positif, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum s_q$ est divergente elle aussi. Par conséquent, la famille $(v_{p,q})_{(p,q) \in I}$ n'est pas sommable.

✿ **Variante.** Si on ne pense pas à utiliser une identité remarquable pour comparer s_q au reste d'une série de Riemann, on peut comparer somme et intégrale. Comme la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{1}{t^2 + q^2} \right]$$

est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + q^2} - \frac{1}{0^2 + q^2} \leq s_q \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + q^2}.$$

(Une figure, soigneusement légendée, est bienvenue...) On doit reconnaître la dérivée de la fonction Arctan :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + q^2} = \left[\frac{1}{q} \operatorname{Arctan} \frac{t}{q} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2q}.$$

On en déduit que

$$s_q = \frac{\pi}{2q} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \sim \frac{\pi}{2q}$$

lorsque q tend vers $+\infty$. Comme la série $\sum \pi/2q$ est une série divergente de terme général positif, on en déduit encore que la série $\sum s_q$ est divergente.

Solution II ✿ Exercice

1. En simplifiant toutes les factorielles, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n-1}{2n+2}$$

On en déduit que le quotient v_{n+1}/v_n converge vers 1 : la règle de D'Alembert ne peut donc pas être appliquée à la série $\sum v_n$ (ni pour prouver qu'elle converge, ni pour prouver qu'elle diverge).

2. D'après le calcul précédent,

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ln \left(1 - \frac{3}{2n+2} \right).$$

Or $\ln(1-u) = -u + \mathcal{O}(u^2)$ pour u voisin de 0 et

$$\frac{3}{2n+2} = \frac{3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{3}{2n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{3}{2n+2}\right]^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis que

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Le développement asymptotique précédent nous conduit à définir la série $\sum r_k$ en posant

$$\forall k \geq 1, \quad \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} = -\frac{3}{2k} + r_k.$$

On a alors (en reconnaissant une somme télescopique)

$$\ln \frac{v_n}{v_1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} = -\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} r_k$$

pour tout entier $n \geq 1$.

D'après le développement asymptotique de 2.,

$$r_k = \mathcal{O}(1/k^2),$$

donc la série $\sum r_k$ est absolument convergente (puisque la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est une série convergente de terme général positif). On notant R , la somme de cette série, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k = R - \sum_{k=n}^{+\infty} r_k = R + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la formule d'Euler,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

(le terme manquant en $1/n$ est absorbé par le $o(1)$).

On en déduit ainsi que

$$\ln \frac{v_n}{v_1} = \frac{-3}{2} \ln n + K + o(1)$$

où $K = R - 3\gamma/2$. En composant par exp, on obtient

$$v_n = \frac{v_1 e^K}{n^{3/2}} \cdot \exp[o(1)] \sim \frac{v_1 e^K}{n\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On en déduit bien sûr que la série $\sum v_n$ est absolument convergente.

4. On applique trois fois la formule de Stirling :

$$(2n-2)! \sim \sqrt{2\pi(2n-2)} e^{-(2n-2)} (2n-2)^{2n-2}$$

$$n!(n-1)! \sim 2\pi\sqrt{n(n-1)} e^{-2n+1} n^n (n-1)^{n-1}$$

et on en déduit par quotient que :

$$\begin{aligned} v_n &\sim \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2(n-1)}{n(n-1)}} \cdot e \cdot \frac{2^{2n-2} (n-1)^{2n-2}}{n^n (n-1)^{n-1}} \\ &\sim \frac{e}{2\sqrt{\pi n}} \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \frac{1}{n} = \frac{e}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

On résout la forme indéterminée de la manière habituelle.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} &= \exp\left[(n-1) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1-n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \end{aligned}$$

(Ce résultat très classique pourrait même être avancé sans aucune justification.) On en déduit enfin que

$$v_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui est plus précis que le résultat précédent.

REMARQUE.— Il est facile de vérifier.

```
from math import factorial as f, sqrt, pi
def V(n):
    return f(2*n-2)/(2**(2*n-1)*f(n)*f(n-1))
def Verif(n):
    return V(n)*n*sqrt(n)*sqrt(pi)
```

n	10 ²	10 ³	10 ⁴
Verif(n)	0.5018848	0.5001876	0.5000188

5. D'après 1., pour tout entier $n \geq 1$,

$$(2n+2)v_{n+1} = (2n-1)v_n$$

et donc

$$v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}. \quad (*)$$

Pour exploiter la relation (*), il faut alors remarquer que

$$(2n+1)v_{n+1} = [2(n+1) - 1]v_{n+1}.$$

Le second membre de (*) est donc le terme général d'une série télescopique. D'après l'ordre de grandeur de v_n ,

$$(2n-1)v_n = \mathcal{O}\left(\frac{n}{n\sqrt{n}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(1).$$

On peut donc sommer la relation (*) pour n variant de 1 à l'infini :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{k+1} = (2 \times 1 - 1)v_1 - 0$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = 2v_1 = 1$$

puisque $v_1 = \frac{0!}{2 \cdot 1! \cdot 0!} = 1/2$.

REMARQUE.— La famille $(v_k)_{k \geq 1}$ est donc une loi de probabilité discrète sur \mathbb{N}^* .

Solution III ✿ Exercice

1. Soit I , le milieu du segment $[A, B]$. On a donc

$$IB = -IA = \frac{1}{2} \cdot AB.$$

Le cercle de diamètre $[A, B]$ est le cercle de centre I et de rayon

$$R = \|IA\| = \|IB\|.$$

On calcule donc

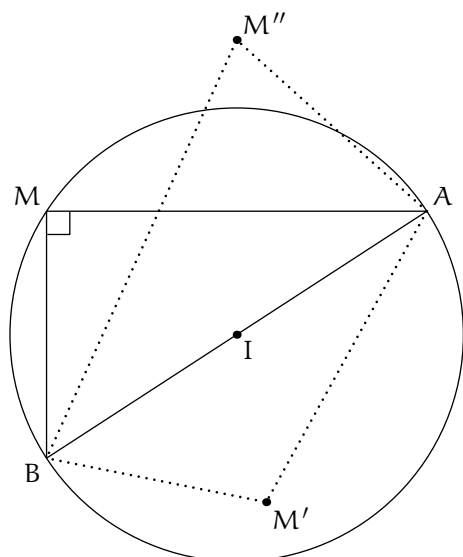
$$\begin{aligned} \|\mathbf{IM}\|^2 &= \langle \mathbf{IA} + \mathbf{AM} | \mathbf{IB} + \mathbf{BM} \rangle \\ &= \langle \mathbf{IA} | \mathbf{IB} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{IB} \rangle + \langle \mathbf{BM} | \mathbf{IA} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -\|\mathbf{IA}\|^2 + \langle \mathbf{AM} - \mathbf{BM} | \mathbf{IB} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -R^2 + \langle \mathbf{AB} | \mathbf{IB} \rangle + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= -R^2 + 2\|\mathbf{IB}\|^2 + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \\ &= R^2 + \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\|\mathbf{IM}\|^2 - R^2 = \langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle.$$

On en déduit que la distance IM est égale à R si, et seulement si,

$$\langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle = 0.$$



2. Le point M est situé à l'intérieur du cercle de diamètre $[A, B]$ si, et seulement si,

$$IM < R,$$

c'est-à-dire

$$\langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle = \|\mathbf{IM}\|^2 - R^2 < 0.$$

De même, le point M est situé à l'extérieur du cercle de diamètre $[A, B]$ si, et seulement si,

$$\langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle > 0.$$

Traduction géométrique.

Le produit scalaire $\langle \mathbf{AM} | \mathbf{BM} \rangle$ est (par définition!) de même signe que le cosinus de l'angle $(\mathbf{AM}, \mathbf{BM})$.

- sur le cercle de diamètre $[A, B]$ lorsque le triangle ABM est rectangle en M ;
- à l'intérieur de ce cercle lorsque l'angle $(\mathbf{AM}, \mathbf{BM})$ est obtus;
- à l'extérieur de ce cercle lorsque l'angle $(\mathbf{AM}, \mathbf{BM})$ est aigu.

Solution IV ✨ **Télescopes et accélération de convergence**

Partie A. Estimations

1.a. On calcule U_n de proche en proche, en partant de la valeur initiale $U_0 = 0$ (somme vide!) et en appliquant la relation de récurrence :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad U_k = U_{k-1} + \frac{1}{k^2}.$$

La traduction en code Python est alors immédiate.

```
def S(n):
    s = 0.0 # U_0 = 0
    for k in range(1, n+1): # ∀ 1 ≤ k ≤ n
        s = s + 1/(k*k) # U_k = U_{k-1} + 1/k^2
    return s # U_n
```

1.b. À chaque itération, on effectue deux multiplications et une addition.

Comme on effectue n itérations, on effectue en tout $2n$ multiplications et n additions. La complexité en temps est donc linéaire (= le nombre d'opérations effectuées est en $\mathcal{O}(n)$).

La complexité en espace est constante (on n'utilise que deux variables locales).

1.c. Par définition, la différence entre la somme S et la somme partielle U_n est égale au reste de la série. On en déduit donc que

$$S - U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

et qu'il faut donc prendre $n \approx 10^3$ pour que U_n soit une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

REMARQUE.— Pour donner une valeur plus précise des entiers n convenables, il faudrait reprendre la comparaison de somme et d'intégrale pour trouver un *majorant explicite* de $|S - U_n|$. (On a perdu pas mal d'information en passant de l'encadrement à l'équivalent...)

Partie B. Accélération de convergence

2. D'après 1.c.,

$$S - U_n \sim \frac{1}{n} \quad \text{tandis que} \quad S - V_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc l'erreur $(S - V_n)$ est infiniment plus petite que l'erreur $(S - U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. S'il existe une suite $(v_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k,$$

alors $v_1 = V_1$ et

$$\forall n \geq 2, \quad v_n = V_n - V_{n-1}$$

Réciproquement, si $v_1 = V_1$ et $v_n = V_n - V_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, alors on a bien

$$\forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

Il existe donc bien une, et une seule, suite $(v_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad V_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

✦ D'après ce qui précède, $v_1 = U_1 + 1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n &= U_n - U_{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n-1)} = \frac{-1}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

4. On en déduit que

$$v_k \sim \frac{-1}{k^3}$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

5. La série de terme général positif $\sum 1/k^3$ est convergente. On déduit de l'équivalent précédent que le reste

$$S - V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

est équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, au reste

$$- \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Or, d'après la propriété rappelée par l'énoncé,

$$- \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

donc

$$S - V_n \sim \frac{-1}{2n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

6.a. Le même raisonnement qu'au 3. s'applique. On en déduit que $w_1 = V_1 - 1/2 = 3/2$ et que, pour tout entier $k \geq 2$,

$$w_k = v_k - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2(k-1)^2} = \frac{1}{2k^2(k-1)^2}.$$

6.b. On reprend le même raisonnement ! Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$w_k \sim \frac{1}{2k^4}.$$

Or la série de terme général positif $\sum 1/k^4$ est convergente, donc le reste

$$S - W_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$$

est équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, au reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^4}.$$

Or, d'après la propriété rappelée par l'énoncé,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \sim \frac{1}{3n^3}$$

donc

$$S - W_n \sim \frac{1}{6n^3}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

7. On applique à nouveau la même méthode : on considère la suite de terme général

$$X_n = W_n + \frac{1}{6n^3}$$

et on explicite la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad X_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

On trouve, pour tout entier $k \geq 2$,

$$x_k = w_k + \frac{1}{6k^3} - \frac{1}{6(k-1)^3} = \frac{-1}{6k^3(k-1)^3}$$

donc

$$x_k \sim \frac{-1}{6k^6}$$

lorsque k tend vers $+\infty$. On en déduit cette fois que le reste $S - X_n$ est équivalent à

$$\frac{-1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} \sim \frac{-1}{30n^5}$$

ce qui est encore plus précis que ce qu'on espérait...

Partie C. Exploitation des résultats

8. On utilise la fonction $S(n)$ définie plus haut.

```
def V(n):
    return S(n)+1/n

def W(n):
    return V(n)-1/(2*n*n)
```

Lorsque l'entier n devient grand, on peut considérer que l'exécution des fonctions $V(n)$ et $W(n)$ effectuée à très peu de chose près le même nombre de calculs que l'exécution de $S(n)$. On obtient ainsi un résultat sensiblement plus précis pour le même prix.

9. D'après le développement asymptotique du reste donné par l'énoncé :

```
def X(n):
    return W(n)+1/(6*n**3)
```

et l'erreur $S - X_n$ est équivalente à $-1/30n^5$.

9.a. On considère ici x comme une valeur approchée de la valeur exacte x_0 et l'exécution de `erreur(x, x0)` retourne l'erreur relative exprimée en pourcentage.

Si l'erreur relative est positive (resp. négative), alors la valeur de x est une valeur approchée par excès (resp. par défaut) de x_0 .

9.b. D'après 1.c., pour $N = 10^4$, l'erreur absolue est de l'ordre de 10^{-4} et l'erreur relative est donc de l'ordre de $6.10^{-4}/\pi^2$, soit 6.10^{-5} (on rappelle que $\pi^2 \approx 10$). C'est

conforme à ce qu'on lit sur la première ligne (erreur par défaut).

Sur la deuxième ligne, on constate que la quatrième décimale augmente d'une unité : on a ajouté $1/N = 10^{-4}$ à U_n . L'erreur absolue est maintenant de l'ordre de $5 \cdot 10^{-9}$ d'après 5., donc l'erreur relative est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-9}$ (puisque $5 \times 6/\pi^2 \approx 3$). Là encore, les valeurs observées sont conformes à la théorie (y compris sur le fait qu'il s'agisse ici d'une erreur par excès).

Sur la troisième ligne, on a retranché $1/2N^2 = 5 \cdot 10^{-7}$ à V_n . On obtient une valeur approchée par défaut et l'ordre de grandeur de l'erreur commise calculé au 6.b. est encore conforme aux valeurs observées.

Sur la dernière ligne, surprise ! On s'attend à une erreur absolue en $\mathcal{O}(1/N^5)$ (équivalente à $-1/30N^5$ d'après la formule donnée par l'énoncé à la fin de la partie B), ce qui correspondrait à une erreur relative d'environ

$$100 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{5 \times 4 + 1}} \cdot \frac{6}{\pi^2} \approx 2 \cdot 10^{-20} \%$$

alors qu'on n'observe qu'une erreur relative de l'ordre de $3 \cdot 10^{-13} \%$! L'explication est toute simple et tient à la représentation des flottants sur huit octets (ou 64 bits) :

$$X_N = W_N + \frac{1}{6N^4} \approx W_n + 2 \cdot 10^{-17}$$

et la correction ajoutée est tellement petite par rapport à W_N qu'elle est tronquée par Python !

Cela nous indique comment exploiter utilement l'étude précédente : il est *vain* de chercher à obtenir une précision infinie lorsqu'on travaille avec des flottants codés sur huit octets ; il est *intéressant* de limiter au minimum les calculs effectués pour atteindre une précision donnée.

Ainsi, pour $N = 500$ seulement, l'erreur relative commise en approchant $\pi^2/6$ par X_N est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-14} \%$. La précision du calcul est donc la même en calculant X_{500} ou X_{10^4} , alors que le calcul de X_{10^4} demande vingt fois plus d'opérations que celui de X_{500} ! Vingt fois plus cher pour la même qualité, je n'achète pas !

Solution V ✨ Étude de fonctions

1. a. La fonction φ est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = e^{-x}(-x^2 - x + 2) - 2.$$

En particulier, $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi'(x)$ tend vers -2 au voisinage de $+\infty$ (par croissances comparées de e^{-x} et des polynômes en x).

1. b. Pour tout $x \in I$,

$$\varphi''(x) = e^{-x}(x^2 - x - 3)$$

et en particulier $\varphi''(0) = -3$.

1. c. La dérivée seconde $\varphi''(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - x - 3$. Comme le coefficient dominant de ce trinôme est positif, il est négatif entre ses racines. Le discriminant étant égal à 13, ces racines sont

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \in I.$$

Ainsi $\varphi''(x) < 0$ pour $-1 < x < \alpha$ et $\varphi''(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

• La dérivée φ' est donc strictement décroissante sur $]-1, \alpha]$. Comme $\varphi'(0) = 0$, on en déduit que $\varphi'(x) > 0$ pour $-1 < x < 0$ et $\varphi'(x) < 0$ pour $0 < x \leq \alpha$.

D'autre part, la dérivée φ' est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Mais comme elle tend vers -2 au voisinage de $+\infty$, on en déduit qu'elle reste strictement négative sur $[\alpha, +\infty[$ et donc en fait sur $]0, +\infty[$.

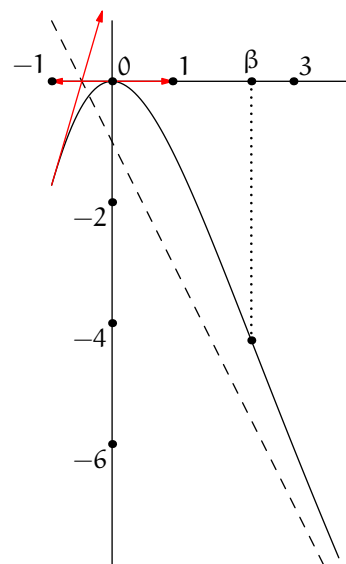
• La fonction φ est donc strictement croissante sur $]-1, 0]$, atteint son maximum en $x = 0$ (et ce maximum est nul : $\varphi(0) = 0$) et est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Finalement, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in I^*$.

1. d. On connaît maintenant les variations de φ sur I et en particulier on sait que son graphe possède une tangente horizontale à l'origine. Par ailleurs,

$$\varphi(x) + (1 + 2x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$$

tend vers 0 par valeurs positives lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote au graphe de φ et que ce graphe est situé *au-dessus* de son asymptote au voisinage de $+\infty$.



2. Comme la fonction \exp est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , le numérateur

$$[x \mapsto 1 - e^{-x}]$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I^* .

Le dénominateur est une expression polynomiale, donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc sur I . Cette expression s'annule seulement pour $x = -1$ et pour $x = 0$, donc le quotient est de classe \mathcal{C}^1 sur I privé de -1 (qui n'appartient pas à I) et de 0 , c'est-à-dire de classe \mathcal{C}^1 sur I^* .

REMARQUE.— Surveillez votre langage ! L'ensemble I^* est réunion de deux intervalles, mais n'est pas un intervalle.

3. a. Pour x voisin de 0 ,

$$1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc pour x voisin de 0 mais non nul (pour ne pas diviser par zéro) :

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Comme

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

on en déduit que

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{2} + \frac{5x^2}{3} + o(x^2).$$

3.b. On juge de la continuité de f en comparant la valeur $f(0)$ avec la limite de f au voisinage de 0 . Or $f(0) = 1$ par définition et $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0 d'après le développement limité précédent. La fonction f est donc bien continue en 0 .

✱ Le développement limité de f calculé en **3.a.** est donc vrai au voisinage de 0 , y compris en $x = 0$. Comme l'ordre de ce développement limité est supérieur à 1 , on en déduit que la fonction f est dérivable en $x = 0$ et que la valeur de $f'(0)$ est égale au coefficient de x dans le développement limité. Autrement dit, $f'(0) = -3/2$.

3.c. Comme f est continue sur I^* d'après **2.** et continue en 0 d'après **3.b.**, elle est continue sur l'intervalle I tout entier.

Toujours d'après **2.**, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur I^* et d'après **3.b.**, elle est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = -3/2$.

Or, pour tout $x \in I^*$,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2(1+x)^2}$$

et au voisinage de 0 ,

$$\varphi(x) = \frac{-3}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$f'(x) = \frac{-3}{2} + o(1)$$

ce qui signifie que $f'(x)$ tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0 .

D'après le théorème du prolongement de classe \mathcal{C}^1 , la fonction f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur I .

REMARQUE.— L'expression de la dérivée $f'(x)$ en fonction de φ montre que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$. Comme la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et strictement décroissante sur l'intervalle I , elle réalise une bijection de I sur l'intervalle

$$J =]\lim_{+\infty} f, \lim_{-1} f[=]-\infty, \frac{e-1}{2}[$$

et comme f' ne s'annule pas, la bijection réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^1 (sur J).

4.a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} &= 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 - 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k!} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2} x^n}{(n+1)!} \quad (n = k-1) \end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (pour ne pas diviser par zéro),

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

4.b. Pour tout $x \in I^*$, le réel $f(x)$ est le produit de

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

par

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

La première série converge absolument pour tout $x \in I^*$ (règle de D'Alembert), tandis que la seconde converge absolument seulement pour $|x| < 1$ (série géométrique de raison $(-x)$). On peut donc appliquer le théorème sur le produit de Cauchy pour $0 < |x| < 1$: la série de terme général

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)!} \cdot (-1)^{n-k} x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \right) x^n$$

est absolument convergente et sa somme est égale à $f(x)$.

En choisissant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!},$$

on a donc

$$\forall 0 < |x| < 1, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Il reste à remarquer que $a_0 = 1 = f(0)$, ce qui prouve que l'égalité est encore vraie pour $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \right] x^n.$$

4.c. D'après la question précédente, $|a_n|$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n!} = e - 1 > 0.$$

4.d. On sait depuis **4.b.** que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

Réciproquement, si $|x| \geq 1$, alors

$$|a_n x^n| \geq \frac{e-1}{2} \cdot 1^n$$

pour tout entier n assez grand, donc la série $\sum a_n x^n$ est grossièrement divergente.

Par conséquent, la série $\sum a_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $|x| < 1$.