Calcul différentiel [23.3, 58.1]

Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ sans être différentiable au point O.

On utilise ici les propriétés usuelles pour démontrer sans aucun calcul que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

$\star$

On commence par le plus facile !

► **[58.1]**

On sait **[64.1]** que toute application linéaire est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Par restriction à l'ouvert $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et par composition par la fonction *Valeur absolue* de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

la fonction $[(x,y) \mapsto |x|]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

Pour les mêmes raisons, la fonction $[(x,y) \mapsto |y|]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U.

Par somme, la fonction

$$h = (x,y) \longmapsto |x| + |y| = \|h\|_1$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et strictement positive sur l'ouvert U. Par composition, la fonction

$$\left[h \mapsto \frac{1}{\|h\|_1}\right]$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

D'autre part, la fonction $[(x,y) \mapsto xy]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale).

Par produit, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U :

$$\forall\, h = (x,y) \in U, \quad f(h) = (xy) \cdot \frac{1}{\|h\|_1}.$$

► **[23.3]**

On vient de vérifier (*très facilement*) que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et donc en particulier différentiable, sur l'ouvert U. Mais la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et pas seulement sur U !

Pour étudier la différentiabilité de f au point $O = (0,0)$, il faut choisir une norme sur $\mathbb{R}^2$. D'un point de vue théorique, cette norme importe peu : elles sont toutes équivalentes. D'un point de vue calculatoire, une norme bien choisie peut nous simplifier la vie.

Devinez quelle norme va nous simplifier la vie !

► On choisit un vecteur $u = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ pour voir si f admet une dérivée selon u au point O.

Pour tout $t \neq 0$,

$$f(O + t \cdot u) = f(t\alpha, t\beta) = \frac{t^2 \alpha\beta}{|t|\, \|u\|_1}$$

et donc

$$\frac{f(O + t \cdot u) - f(O)}{t - 0} = \operatorname{sgn}(t) \cdot \frac{\alpha\beta}{\|u\|_1}.$$

▷ En particulier, pour $u = (1,0)$ et pour $u = (0,1)$, cette expression est nulle pour tout $t \neq 0$, donc f admet des dérivées partielles à l'origine :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = \lim_{t \to 0} \frac{f(O + t \cdot e_1) - f(O)}{t - 0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = \lim_{t \to 0} \frac{f(O + t \cdot e_2) - f(O)}{t - 0} = 0.$$

▷ En revanche, si α et β sont différents de 0, alors la limite du taux d'accroissement pour $t \to 0^+$ est distincte de sa limite pour $t \to 0^-$ (elles sont opposées et non nulles). Dans ce cas, la fonction f n'admet pas de dérivée selon le vecteur u au point O.

On en déduit **[22.5]** que f n'est pas différentiable à l'origine.

A fortiori **[54]**, la fonction f, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert U, n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

► On sait **[12.2]** que toute fonction différentiable est continue.

Nous allons constater, grâce à cette fonction f, qu'une fonction peut être continue au point O sans être différentiable en ce point.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ (*what else?*).

▹ Sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, le numérateur $[(x, y) \mapsto xy]$ est continu (fonction polynomiale) et le dénominateur, qui ne s'annule pas (il ne s'annule qu'en O), est continu comme somme de fonctions continues :

$$(x, y) \longmapsto x \longmapsto |x| \qquad (x, y) \longmapsto y \longmapsto |y|$$

donc la fonction f est bien continue sur l'ouvert Ω.

▹ On remarque que

$$\forall\, h = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \leqslant \|h\|_1 \quad \text{et} \quad |y| \leqslant \|h\|_1 .$$

Par conséquent,

$$\forall\, h \neq (0, 0), \quad \big|f(O + h) - f(O)\big| = \big|f(O + h)\big| = \frac{|x|\,|y|}{\|h\|_1} \leqslant \frac{\|h\|_1^2}{\|h\|_1} = \|h\|_1$$

et le Théorème d'encadrement prouve alors que f est continue au point O.

▹ La fonction f est donc bien continue en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

REMARQUE.— Comme on a trouvé que les deux dérivées partielles étaient nulles à l'origine et comme, par construction, $f(O) = 0$, si f avait été différentiable au point O, son développement limité aurait été

$$f(O + h) = f(O) + 0 + o(h) = o(h).$$

On vient en fait de prouver ici que $f(O + h) = \mathcal{O}(h)$: on n'est pas loin, mais on n'y est pas !