Topologie d'un EVN [13]

On tire ici quelques conséquences simples de l'inégalité triangulaire. Ces résultats sont "physiquement" évidents lorsque le plan ou l'espace est muni de la norme euclidienne canonique. Il est intéressant de constater qu'ils restent vrais indépendamment de la norme choisie !

$\star$

1. Soit A, une sphère/une boule ouverte/une boule fermée de centre a et de rayon r.

► Quels que soient x et y dans A,

$$\|x-y\| \leqslant \|x-a\| + \|a-y\| \leqslant 2r$$

donc A est bien une partie bornée et son diamètre est inférieur à $2r$.

► Soit u, un vecteur unitaire (y en a). On pose alors $x = a + r \cdot u$ et $y = a - r \cdot u$. On a donc

$$\|x-a\| = \|r \cdot u\| = r \cdot \|u\| = r$$

et de même $\|y-a\| = r$, donc x et y sont des points de la sphère/de la boule fermée de centre a et de rayon r. Or

$$\|x-y\| = \|2r \cdot u\| = 2r \cdot \|u\| = 2r.$$

Donc le diamètre de la sphère/de la boule fermée est égal à $2r$.

► Si A est la boule *ouverte* de centre a et de rayon r, alors on pose

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad x_n = a + \frac{(n-1)r}{n} \cdot u \quad \text{et} \quad y_n = a - \frac{(n-1)r}{n} \cdot u$$

de telle sorte que

$$\|x_n - a\| = \frac{(n-1)r}{n} < r$$

et donc que $x_n \in A$. De même, $y_n \in A$.

Or $\|x_n - y_n\| = \frac{2(n-1)r}{n}$, ce qui tend vers $2r$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent,

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} \|x-y\| \geqslant \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 2r$$

et par double inégalité, on a démontré que le diamètre de la boule *ouverte* A était égal à $2r$.

2. Soit A, la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.

► Quels que soient les points x et y dans A, on a donc

$$\|x-a\| < r \quad \text{et} \quad \|y-a\| < r.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|(1-t)\cdot x + t\cdot y - a\| &= \|(1-t)\cdot(x-a) + t\cdot(y-a)\| \\ &\leqslant \underbrace{(1-t)}_{\geqslant 0} \cdot \|x-a\| + \underbrace{t}_{\geqslant 0} \cdot \|y-a\| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant stricte comme somme de deux inégalités dont l'une au moins est stricte (pour $t = 0$ et pour $t = 1$, une seule est stricte ; pour $0 < t < 1$, les deux sont strictes).

Cela prouve que $[x, y] \subset A$ et donc que A est convexe.

► Si A est une boule fermée, il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.

3. Soient $0 < s \leqslant r$.

► On suppose que $\|b-a\| \leqslant r-s$.

Considérons un point x de la boule ouverte de centre b et de rayon s. On a donc
$$\|x-b\| < r$$
et par inégalité triangulaire
$$\|x-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < s + (r-s) = r$$
donc $x \in B_o(a, r)$.

► Réciproquement, on suppose que $a \neq b$ et que $B_o(b, s) \subset B_o(a, r)$. Pour tout $0 < t < s$, le vecteur
$$x_t = b - t \cdot \frac{a-b}{\|a-b\|}$$
appartient à la boule ouverte $B_o(b, s)$:
$$\|x_t - b\| = t \cdot \left\| \frac{a-b}{\|a-b\|} \right\| = t < s.$$
On a alors
$$x_t = a + (b-a) + t \cdot \frac{b-a}{\|a-b\|} \in B_o(a, r)$$
et donc
$$\forall\, 0 < t < s, \quad \|x_t - a\| = \|b-a\| + t < r.$$
Par passage au sup (par rapport à t), on en déduit que $\|b-a\| + s \leqslant r$.

► Supposons qu'il existe un point $x \in B_o(b, s) \cap B_o(a, r)$. On a alors
$$\|b-a\| \leqslant \|b-x\| + \|x-a\| < r + s.$$
Par contraposée, si $\|b-a\| \geqslant r+s$, alors les boules ouvertes $B_o(a, r)$ et $B_o(b, s)$ sont disjointes.

► Réciproquement, on suppose que $\|b-a\| < r + s$.

❧ Si $\|b-a\| < r$, alors b appartient à $B_o(a, r)$, donc l'intersection des deux boules ouvertes contient au moins b !

❧ On suppose donc que que $\|b-a\| \geqslant r$. On peut donc choisir un réel λ tel que
$$0 \leqslant \|b-a\| - r < \lambda < s.$$
On pose alors
$$x = b + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$
On a donc $\|x-b\| = \lambda < s$, donc $x \in B_o(b, s)$. Mais on a aussi
$$x - a = \|b-a\| \cdot \frac{b-a}{\|b-a\|} + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|} = \big(\lambda - \|b-a\|\big) \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|}$$
et donc
$$\|x-a\| = \big|\lambda - \|b-a\|\big|.$$
D'après nos hypothèses,
$$-r < \lambda - \|b-a\| \leqslant s - \|b-a\| \leqslant s - r \leqslant 0$$
donc $\|x-a\| < r$, donc $x \in B_o(a, r)$. On a ainsi trouvé un vecteur x appartenant aux deux boules ouvertes : l'intersection de ces boules n'est donc pas vide.