

*On démontre ici la caractérisation séquentielle de l'adhérence.*

★

1. On suppose que  $x \in E$  est un point adhérent à  $A$ . Par définition [24.1], pour tout  $r > 0$ , l'intersection  $A \cap B_f(x, r)$  n'est pas vide, donc il existe au moins un élément  $y(r)$  qui appartienne à la fois à  $A$  et à la boule  $B_f(x, r)$ , c'est-à-dire un élément  $y(r) \in A$  tel que

$$\|x - y(r)\| \leq r.$$

2. On suppose que

$$\forall r > 0, \exists y(r) \in A, \quad \|x - y(r)\| \leq r.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on choisit  $r = 2^{-n} > 0$ . Il existe donc  $y_n \in A$  tel que

$$\|x - y_n\| \leq 2^{-n}.$$

Par encadrement, une telle suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  converge vers  $x$ .

3. On suppose qu'il existe une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ . Par définition,

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

Comme la borne inférieure est un minorant, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d(x, A) \leq \|x - y_n\|$$

et, par encadrement,  $d(x, A) = 0$ .

4. On suppose enfin que  $d(x, A) = 0$ .

Si  $r > 0$ , alors

$$r > \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

donc il existe  $y(r) \in A$  tel que

$$r > \|x - y(r)\|$$

c'est-à-dire  $y \in A \cap B_o(x, r) \subset A \cap B_f(x, r)$ . Par conséquent,

$$\forall r > 0, \quad A \cap B_f(x, r) \neq \emptyset.$$

REMARQUE.— On retiendra en particulier que le point  $x$  appartient à l'adhérence de  $A$  si, et seulement si, il existe une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .