Topologie d'un EVN [26, 31]

⋆

On démontre ici la caractérisation globale de l'adhérence : on ne cherche plus à caractériser les points de E qui sont adhérents à A (ce qu'on a fait au **[25]***), mais à caractériser l'ensemble $\overline{A}$ comme un "fermé extrémal".*

[26.1] *Dans un premier temps, on montre que l'adhérence $\overline{A}$ de A est stable par passage à la limite : c'est donc une partie fermée de E.*

❧ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers un point $\ell \in E$. Il s'agit de prouver que $\ell \in \overline{A}$ et donc qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers ℓ.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point x_n est adhérent à A. Or $2^{-n} > 0$, donc **[25.2]** il existe un point $u_n \in A$ tel que

$$\|x_n - u_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|\ell - u_n\| = \|\ell - x_n + x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + \|x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + 2^{-n}.$$

Le majorant est la somme de deux quantités de limite nulle, donc $\|\ell - u_n\|$ tend vers 0 par encadrement.

❧ On a ainsi démontré qu'il existait une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui convergeait vers ℓ. Donc $\ell \in \overline{A}$.

[26.2] Par **[26.1]**, l'adhérence de A est un fermé et par **[24.3]**, l'adhérence de A contient A :

$$A \subset \overline{A}.$$

Considérons maintenant une partie fermée F qui contienne A : $A \subset F$.

Pour tout $y \in \overline{A}$, il existe **[25.3]** une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers y.

Comme $A \subset F$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers y. Or F est fermé, donc **[23.8]** la limite y est un élément de F.

Ainsi $\overline{A} \subset F$.

❧ On vient donc de démontrer que l'adhérence de A était un fermé qui contenait A et que, de tous les fermés qui contiennent A, l'adhérence de A est le plus petit de tous.

⋆

On démontre maintenant une caractérisation analogue de l'intérieur d'une partie A qu'on présente comme un "ouvert extrémal".

[31.1] Soit x, un point intérieur à A. Par définition **[30.1]**, A est un voisinage de x et en particulier $x \in A$. Donc $A^\circ \subset A$.

❧ Plus précisément, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, r)$ soit contenue dans A. Or cette boule ouverte est une partie ouverte **[22.5]**, donc $B_o(x, r)$ est un voisinage de chacun de ses points **[déf. 22.1]** et comme $B_o(x, r) \subset A$, la partie A est un voisinage de chaque point de $B_o(x, r)$ **[17.3]**. De la sorte, la boule $B_o(x, r)$ est tout entière contenue dans A°, ce qui prouve que A° est un voisinage de x.

On a donc démontré que A° était un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire une partie ouverte de A.

❧ Considérons maintenant une partie ouverte G contenue dans A : $G \subset A$.

Par définition, pour tout $x \in G$, la partie G est un voisinage de x et donc **[17.3]** A est un voisinage de x. Cela signifie que A est un voisinage de chaque point de G, c'est-à-dire **[30.1]** que chaque point de G est à l'intérieur de A :

$$G \subset A^\circ \subset A.$$

❧ On vient donc de démontrer que l'intérieur de A est une partie ouverte contenue dans A et que, de tous les ouverts contenus dans A, l'intérieur de A est le plus grand de tous.

[31.3] On sait **[26.2]** que $\overline{A}$ est une partie fermée qui contient A :

$$A \subset \overline{A}.$$

On en déduit que

$$(\overline{A})^c \subset A^c.$$

En tant que complémentaire d'une partie fermée, $(\overline{A})^c$ est une partie ouverte et elle est contenue dans A^c. Par **[31.1]**, elle est aussi contenue dans l'intérieur de A^c. Donc

$$(\overline{A})^c \subset (A^c)^\circ.$$

Réciproquement, on sait **[26.1]** que $(A^c)^\circ$ est un ouvert contenu dans A^c. Par passage au complémentaire,

$$A = (A^c)^c \subset [(A^c)^\circ]^c.$$

Ainsi **[23.1]** $[(A^c)^\circ]^c$ est une partie fermée qui contient A et on déduit de **[26.2]** que

$$\overline{A} \subset [(A^c)^\circ]^c$$

et donc que

$$(A^c)^\circ \subset (\overline{A})^c.$$

Par double inclusion, on a démontré que $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$.

❧ La propriété précédente est vraie pour toute partie $A \subset E$, en particulier pour A^c. On a donc démontré que

$$[(A^c)^c]^\circ = A^\circ = (\overline{A^c})^c$$

et donc, par passage au complémentaire, que

$$(A^\circ)^c = \overline{A^c}.$$