

## I

## Filière MP

1. Une bonne connaissance des théorèmes du cours est indispensable pour étayer ses raisonnements, pas seulement des noms des théorèmes, qui peuvent varier, mais des hypothèses précises utilisées et des conclusions effectives. Mieux vaut ne pas nommer un théorème que lui donner un nom farfelu.
2. Une bonne connaissance des formules classiques (primitives usuelles, formules de trigonométrie, développements limités usuels) est incontournable, ce qui ne dispense pas de savoir les retrouver au besoin quand sa mémoire est infidèle.
3. Les lacunes en calcul sont patentes et très handicapantes. Il faut savoir ne pas se décourager face à de simples, mais inévitables calculs : une petite technicité calculatoire est un outil essentiel de recherche. Les candidats en difficulté sur ce point sont invités à s'entraîner, en tous cas à ne pas éviter les calculs qu'ils rencontrent lors de leur préparation.

## I.1 Logique et raisonnement

4. Sur le plan logique, une implication est souvent appelée « sens » ! Les hypothèses du problème sont parfois floues. On ne sait pas si on raisonne par implications ou par équivalences logiques. L'usage du conditionnel rajoute au flou entretenu délibérément : « On aurait... ».
5. On observe souvent un refus d'utiliser les quantificateurs (équations différentielles ou convergence de suites de fonctions, par exemple). Certains candidats préfèrent en effet les expressions abscones « avec », « où »...  
Aussi, des confusions conceptuelles classiques subsistent : intégrale/primitive, série/somme, indépendance/incompatibilité...
6. Les raisonnements par récurrence sont dédaignés ou très flous (au mieux, « on itère »).

## I.2 Algèbre

## Algèbre générale

7. L'algèbre générale conserve une attractivité qui récompense les plus alertes des candidats. Cependant, on note une baisse de niveau : certains candidats ne savent pas ce qu'est un groupe, un corps, une algèbre ou les propriétés qu'on peut alors utiliser.
8. Pour beaucoup, les connaissances requises en algèbre générale se limitent souvent aux notions de base sur les structures. Les connaissances utiles sur les groupes ou les idéaux ne sont pas toujours maîtrisées.
9. Le maniement des polynômes et des fractions rationnelles reste très inégal chez les candidats.
- 9.1 On attend en particulier qu'ils sachent exploiter ou rechercher les racines d'un polynôme, factoriser ou faire le lien avec les coefficients, et qu'ils sachent exploiter les fractions rationnelles, leurs pôles ou décompositions.
- 9.2 La décomposition en éléments simples est longue à venir pour certains candidats, parfois le théorème de décomposition n'est pas même su.
10. Enfin, l'arithmétique est, dans l'ensemble, convenablement maîtrisée.

## Algèbre linéaire

11. Les difficultés se sont accrues dans ce domaine, la mise en place d'une stratégie adaptée est un gros écueil pour de nombreux candidats.

12. Ainsi, ces derniers ont du mal à utiliser un point de vue approprié (base adaptée par exemple) au problème étudié. Plus généralement, construire une démonstration en algèbre linéaire n'est pas une chose aisée.
13. Certains candidats confondent supplémentaire et complémentaire ce qui donne lieu à de gros contresens dans leurs manipulations.
14. Les différentes caractérisations d'hyperplans, notamment en dimension infinie, restent relativement méconnues.
15. Beaucoup de candidats confondent les matrices avec les endomorphismes ce qui les empêche d'utiliser efficacement le second point de vue en cas de changement de base.  
En particulier, peu pensent à utiliser des résultats de similitude ou d'équivalence pour se ramener à des manipulations de matrices plus simples.
16. L'outil matriciel, notamment le calcul avec des indices, n'est pas particulièrement bien maîtrisé.
17. Les polynômes d'endomorphismes donnent toujours lieu à de nombreuses surprises.
18. Nous rappelons encore cette année qu'une matrice à coefficients réels peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes, pour la diagonaliser en conséquence le cas échéant par exemple, ce que trop de candidats ont du mal à utiliser.
19. Enfin un nombre non négligeable de candidats semblent s'accrocher plus que de raison à la co-diagonalisation ou à la co-trigonalisation. Rappelons ici que toute notion hors programme utilisée lors de l'épreuve d'oral devra a priori être justifiée.

## Algèbre bilinéaire

20. Mis à part le théorème spectral que tous les candidats connaissent, le reste est encore peu maîtrisé.
21. Nous rappelons que pour qu'un vecteur dans un espace euclidien soit nul il suffit que sa norme soit nulle, ou encore qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs, ce à quoi beaucoup de candidats ne pensent pas.
22. Le théorème d'orthonormalisation de Schmidt pose toujours des problèmes à certains étudiants.
23. Concernant les endomorphismes remarquables d'un espace euclidien, le théorème spectral semble être bien assimilé pour les matrices, mais nettement moins pour les endomorphismes symétriques.
24. Les caractérisations, ainsi que certaines propriétés, des endomorphismes orthogonaux restent un mystère pour certains candidats. Certains les confondent même avec les endomorphismes symétriques !

## I.3 Analyse

25. Il est regrettable de constater que :
  - 25.1 les valeurs absolues et les inégalités sont traitées parfois avec désinvolture ;
  - 25.2 les formules de base de la trigonométrie ne sont souvent pas sues. C'est un handicap à l'oral dans différents domaines. Ainsi, la linéarisation du carré d'un cosinus, la relation entre les carrés de tangente et du cosinus, les relations de duplication, restent méconnues pour certains. Quelques candidats peinent même à les retrouver !
  - 25.3 la continuité n'est pas une notion passe-partout à invoquer à tout bout de champ ;
  - 25.4 dire, sans le justifier, qu'une propriété est vraie, ou passe de tel ensemble à tel autre (« par continuité » reste insuffisant en général) ;

25.5 la dérivation de fonctions usuelles, le calcul de primitives simples, devient un gros problème pour quelques candidats, heureusement peu nombreux. Les primitives usuelles ne font d'ailleurs pas toujours partie du bagage de certains candidats admissibles ;

25.6 De nombreux étudiants confondent développements limités et équivalents. Ainsi il n'est pas rare de rencontrer par exemple :

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{x}{2}.$$

La connaissance des développements limités usuels n'est pas bonne. Pour trop d'étudiants, les erreurs de signe ou de coefficients dans les développements limités sont clairement habituelles.

### Topologie

26. Les définitions d'un compact, d'un ouvert, d'un fermé ne sont pas toujours correctement données. Certains candidats ne connaissent que le critère séquentiel pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée.

27. Reconnaître une norme préhilbertienne pose trop souvent problème.

### Suites et séries

28. De nombreux candidats ont des difficultés avec les suites définies par une relation de récurrence.

29. Les méthodes utilisant les développements limités (ou asymptotiques) pour étudier la nature d'une série de signe non constant, ou pour étudier une suite somme d'une série télescopique, sont mal connues.

### Suites et séries de fonctions

30. Le jury rappelle qu'il faut préciser sur quel ensemble a lieu telle ou telle convergence.

31. Dans la manipulation des séries de fonctions (recherche d'équivalent d'une somme, estimation du reste...) de nombreux candidats commettent des confusions entre la variable utilisée et l'indice de sommation.

### Séries entières

32. Dans le calcul du rayon de convergence, il semble que l'utilisation abusive de la règle d'Alembert ait régressé. Cependant toutes les méthodes pour déterminer le rayon de convergence ne sont pas sues. Quelques candidats ignorent même la définition du rayon de convergence !

33. Certains candidats confondent l'intervalle ouvert de convergence et le domaine de convergence d'une série entière. Beaucoup d'entre eux pensent que la convergence est uniforme sur tout l'intervalle ouvert de convergence !

### Intégration

34. On rappelle à nouveau que l'étude de l'intégrabilité d'une fonction ne se réduit pas à étudier la fonction au voisinage des bornes de l'intervalle d'intégration et que la continuité (par morceaux éventuellement) doit être considérée.

Pour beaucoup trop de candidats, l'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque commence toujours par : « Il y a un problème en... ». La continuité de la fonction est complètement occultée et il n'est pas rare d'entendre : « Il n'y a pas de problème donc la fonction est intégrable ».

35. Les énoncés des théorèmes de changement de variables sont toujours mal connus.

35.1 Beaucoup de candidats sont capables de faire un changement de variable sur un exemple, mais ne connaissent pas la formule.

35.2 En ce qui concerne les hypothèses des théorèmes, certains candidats exigent que le changement de variable soit  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone alors que l'on calcule l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

35.3 Inversement, dans le cas d'une intégrale sur un intervalle non compact, ils n'exigent pas qu'il soit de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijectif, confondant les deux théorèmes.

36. La formule de Taylor avec reste intégral est mal écrite et ses hypothèses d'application sont souvent méconnues.

37. Enfin le théorème des sommes de Riemann est inconnu de certains candidats.

### Équations différentielles

38. La pratique sur les équations différentielles linéaires du premier et deuxième ordre est en général convenable, mais il n'est pas toujours possible d'avoir un énoncé clair et précis des théorèmes du programme sur ce paragraphe.

39. On rencontre cependant des étudiants désirant à tout prix utiliser une équation caractéristique, même si l'équation étudiée n'est pas à coefficients constants.

40. Le recours à l'exponentielle ou les méthodes de variations de constantes ne sont pas toujours dominés (même si on note un mieux pour ces dernières). Pourtant cela peut permettre d'explicitier les solutions (même si on a recours à une intégrale) et permet d'analyser des propriétés qualitatives des solutions.

41. On observe aussi que certains candidats ne recherchent en général pas de solution directe. Ils se lancent immédiatement dans la méthode des séries entières sans se soucier de la nature du domaine.

### Fonctions de plusieurs variables

42. Le jury note toujours la confusion que font un certain nombre de candidats entre continuité globale d'une application et sa continuité partielle.

43. La notion de différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables pose beaucoup de problèmes. Il faut savoir qu'une telle fonction n'est pas forcément différentiable en un point uniquement parce que les dérivées partielles existent en ce point. Des exemples simples d'une telle situation sont faciles à trouver.

44. La formule de la dérivation en chaîne est souvent mal assimilée.

45. L'étude des extremums des fonctions de plusieurs variables reste délicate pour bien des candidats : ils se ruent sur l'étude des points critiques sans s'assurer de la pertinence de cette méthode et sans être capables de citer correctement le moindre théorème susceptible de la légitimer.

46. Enfin il peut être utile de décomposer une fonction de plusieurs variables en composée de fonctions plus simples, ce qui permet parfois de traiter rapidement certaines questions.

### I.4 Probabilités

47. Les probabilités sont, dans l'ensemble, convenablement maîtrisées, en particulier en ce qui concerne les variables aléatoires.

48. On note cependant des confusions sur les objets « l'univers de  $X$  », « les variables aléatoires sont disjointes ».

49. Cependant, pour ce qui est de la partie modélisation du problème probabiliste étudié, il semble qu'il y ait un décalage entre deux catégories de candidats : ceux qui sont dans une démarche temporelle et qui ont du mal à mettre en place leurs idées et ceux qui arrivent à gérer globalement la modélisation de l'expérience et qui s'en sortent souvent mieux.

50. Les candidats ne font pas suffisamment l'effort de décrire les événements ou les systèmes complets adaptés à la situation.

51. Certains candidats ont des difficultés importantes pour donner des définitions exactes des notions manipulées, en particulier pour l'indépendance.

52. On note enfin de grosses difficultés avec l'analyse combinatoire.

52.1 Le dénombrement se limite à des schémas, des gestes et « des parachutages ».

52.2 Les candidats raisonnent essentiellement de manière intuitive. Beaucoup sont incapables de partitionner un ensemble ou de construire une bijection entre ensembles finis pour justifier leurs résultats et dénombrer correctement.

## I.5 Géométrie

53. Les rares exercices de géométrie proposés (conformes à ce qui reste dans le programme) ont juste permis de constater la disparition de fait de toute pratique sur le sujet.

54. Pire : pour certains candidats les droites du plan sont toujours représentées par des équations du type :  $y = ax + b$ .

## I.6 Vocabulaire

55. Pour éviter une perte de temps, le jury tolère l'utilisation des abréviations usuelles à l'épreuve d'oral. Cependant écrire des abréviations ne dispense pas de prononcer la totalité des mots. Ainsi, le candidat qui note « CV » devra prononcer « la série converge ».

56. Enfin trop d'étudiants prennent la mauvaise habitude de saupoudrer la locution « il faut » tout au long de leur exposé et confondent bien souvent condition nécessaire et condition suffisante.

## I.7 Conclusions

57. L'oral est un exercice difficile et différent de l'écrit en ce qu'il révèle d'autres qualités. Il est naturel que les performances des candidats ne soient pas exactement les mêmes dans les deux types d'épreuves. Les résultats de l'oral peuvent bouleverser le classement, il est donc important de bien s'y préparer.

58. De bons candidats se pénalisent eux-mêmes à cause de leur vision déformée de l'oral et/ou leur préparation formatée. En difficulté, ils se mettent à réciter tout ce qu'ils savent plutôt que de réfléchir, quitte à débiter des informations totalement hors de propos.

# II

## Filière PSI

59. Il faut s'exprimer de la manière la plus distincte et explicite possible, structurer son discours à l'aide de connecteurs logiques (*supposons que, nous en déduisons que, donc, par conséquent, ainsi*) et bannir les tics de langage tels que « du coup » et « au final ».

Il est inutile de paraphraser l'énoncé, ou de jouer la montre.

## II.1 Calcul et raisonnement

60. Le jury remarque que les candidats hésitent de plus en plus à se lancer dans un petit calcul (en analyse notamment) alors que celui-ci peut les faire avancer.

61. Une grande partie des candidats a du mal à établir des majorations ou dominations simples, indispensables pour l'utilisation de nombreux théorèmes d'analyse.

62. Les calculs d'équivalents, développements limités (même à l'ordre 3) sont souvent trop approximatifs. Trop de candidats ne ressentent pas le besoin de supprimer les termes négligeables devant le reste dans un développement limité ou asymptotique.

63. Les formules de Taylor sont mal sues.

64. Les calculs sur les complexes peuvent également poser problème, notamment la recherche du nombre de racines cubiques d'un complexe non nul, ou encore la méconnaissance de l'expression des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

65. Les changements d'indices dans les calculs de sommes donnent souvent lieu à des maladresses. Cela se traduit par une grande lenteur dans les calculs et une multiplication des erreurs, en particulier lors de la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle linéaire.

66. Les hypothèses de récurrence doivent être spontanément écrites avec soin. L'examineur ne devrait pas avoir à insister auprès du candidat pour obtenir une hypothèse de récurrence écrite in extenso avec les bons quantificateurs.

67. Plus généralement, un usage éclairé des quantificateurs peut s'avérer déterminant pour certains problèmes. Leur absence conduit certains candidats à passer complètement à côté d'un exercice.

68. Le résultat d'un calcul devrait spontanément être simplifié, tant que faire se peut.

## II.2 Analyse

69. Le schéma d'étude des suites récurrentes du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

n'est pas bien maîtrisé par certains candidats.

70. Il est parfois bien utile d'étudier une fonction ou de tracer une courbe pour se forger une intuition dans un exercice d'analyse.

71.1 Concernant la convergence des séries, certains candidats font un usage abusif de majorations et d'équivalents pour des séries à termes non positifs, et tous ne pensent pas à examiner la convergence absolue.

71.2 En revanche, le critère spécial des séries alternées est généralement bien connu, ainsi que les majorations de la somme partielle et du reste qui l'accompagnent.

72. Les théorèmes sur les suites et séries de fonctions sont en général bien sus. Dans leur application on attend l'emploi de quantificateurs et d'intervalles précis, notamment pour prouver la convergence uniforme.

73.1 Lors de l'introduction d'une série entière, il faut systématiquement préciser son rayon de convergence avant de se lancer dans un calcul.

73.2 Les produits de Cauchy ne sont pas toujours reconnus, avec des difficultés techniques de calcul si les séries ne sont pas indicées à partir de  $n = 0$ .

74. Il est plus judicieux de raisonner en termes de fonction intégrable et pas d'intégrale convergente lors de l'emploi de théorème de comparaison, surtout lorsque la fonction n'est pas clairement positive.

Et là encore, l'utilisation de valeurs absolues n'est pas toujours naturelle lorsque les fonctions ne sont pas positives.

75.1 Rappelons que le théorème de convergence dominée est applicable, quand bien même l'intervalle d'intégration est un segment (certains candidats pensent qu'il est nécessaire d'être en présence d'intégrales généralisées pour l'utiliser).

75.2 Plus généralement, malgré une bonne connaissance des théorèmes d'interversion série-intégrale, les candidats manquent de méthode pour savoir lequel employer.

76. Les théorèmes de continuité et de dérivabilité pour les intégrales à paramètres sont souvent connus et appliqués au bon moment.

76.1 Néanmoins les candidats mettent beaucoup trop de temps à vérifier les hypothèses de ces théorèmes, s'attardant souvent sur l'hypothèse de continuité par morceaux (sans rien démontrer d'ailleurs et avec omission des quantificateurs), semblant vouloir retarder le moment de vérifier l'hypothèse de domination.



76.2 Et pour cause, c'est bien cette hypothèse qui pose le plus problème, une grande partie des candidats sont lourdement pénalisés par leur manque de maîtrise des inégalités.

76.3 À noter qu'une partie d'entre eux confondent la variable d'intégration et le paramètre pour prouver l'intégrabilité de la fonction ou encore dans le calcul des dérivées partielles.

77. Trop souvent les candidats pensent que la convergence normale ou uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  entraîne la convergence normale ou uniforme sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

78. Concernant les espaces vectoriels normés, chapitre plus délicat pour les candidats, il est important de maîtriser les concepts d'ouvert, de fermés et de continuité des applications linéaires en dimension finie, équivalent au caractère lipschitzien des applications linéaires continues.

79.1 Concernant les fonctions de plusieurs variables, l'étude des extremums locaux est mieux menée cette année, mais il faut prendre soin de préciser que l'on se place sur des ouverts et que la fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

79.2 L'existence de bornes sur un fermé borné pour une fonction continue devrait être systématiquement mentionnée.

79.3 Les méthodes pour prouver la continuité d'une fonction à deux variables, ou celle de ses dérivées partielles dans le but de prouver que celle-ci est de classe  $\mathcal{C}^1$  ne sont pas maîtrisées par les candidats.

79.4 La notion de gradient reste confuse.

80. Concernant les équations aux dérivées partielles, les calculs sont en général bien menés, on regrette néanmoins le manque de justification du caractère  $\mathcal{C}^1$  du changement de variable proposé.

81. Enfin, l'étude des courbes paramétrées fait souvent peur aux candidats, qui manquent de réflexes sur ce chapitre.

## II.3 Algèbre

82. Globalement le cours d'algèbre linéaire de PSI est su, mais manque de recul.

82.1 Les exercices d'algèbre linéaire abordables en première année sur les noyaux et images d'endomorphismes peuvent poser problème.

82.2 Il est souvent plus rapide de prouver qu'une application est linéaire par composée d'applications linéaires que de revenir à la définition.

82.3 La notion de sous-espace stable et endomorphisme induit n'est pas toujours maîtrisée.

83. Il n'est pas suffisant, pour établir qu'un endomorphisme est diagonalisable, de donner la liste exhaustive des critères de diagonalisabilité : il faut choisir la plus adaptée à la situation.

83.1 La caractérisation par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples n'est pas toujours spontanément citée, et lorsque c'est le cas la simplicité des racines est souvent oubliée.

83.2 Des confusions d'inégalités entre dimension des sous-espaces propres et multiplicité des valeurs propres.

84. Les candidats savent en général que l'indice de nilpotence d'une matrice de taille  $n$  est majoré par  $n$ , bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme (en PSI), mais tous ne savent pas le démontrer.

85. Certains candidats mentionnent le polynôme minimal, notion ne faisant pas partie du programme de PSI. Dans ce cas, il faut savoir le définir et prouver les propriétés que l'on souhaite utiliser, sachant qu'il y a nécessairement une autre façon de résoudre l'exercice.

86. Le calcul (effectif) de déterminant et en particulier de polynôme caractéristique est assez mal maîtrisé et souvent compliqué.

87. On note des difficultés à reconnaître une matrice de rotation du plan d'angle  $\pi/2$ .

88.1 En algèbre bilinéaire, les candidats reconnaissent en général les situations de calcul d'un minimum à l'aide d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie (notamment les hyperplans).

88.2 Néanmoins lorsqu'il ne s'agit pas d'hyperplans pour le calcul effectif de la distance, les candidats privilégient plutôt l'utilisation de l'orthonormalisation de Schmidt plutôt que l'écriture du système caractérisant le projeté orthogonal, ce qui se révèle souvent plus lourd.

## II.4 Probabilités

89. La modélisation des situations probabilistes pose problème pour une bonne moitié des candidats, l'autre parvenant en général à représenter la situation.

89.1 Penser à introduire de nouvelles variables aléatoires pour modéliser.

89.2 Trop théoriser le contexte probabiliste sans réfléchir à l'interpréter mène souvent à écrire des inepties.

90. Certains candidats confondent encore indépendance et incompatibilité, ainsi qu'union et intersection pour décrire de manière ensembliste les événements.

Des difficultés pour justifier les étapes de calcul, notamment pour l'emploi de la formule des probabilités totales, souvent mal utilisée.

91. Les liens entre les quantificateurs existentiel et universel, d'une part, et les symboles réunion et intersection d'autre part, ne sont pas toujours clairs.

92. La connaissance précise des espérances et variances des lois usuelles permet de ne pas perdre du temps à refaire le calcul.

93. Concernant les inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, la loi faible des grands nombres, les hypothèses sont souvent oubliées.

94. Pour calculer l'espérance d'une somme, il peut être plus judicieux de faire appel à la linéarité de l'espérance.

## II.5 Conclusion

95. Les erreurs et défauts mis en évidence dans ce rapport proviennent généralement soit d'une mauvaise maîtrise du cours, soit d'une mauvaise maîtrise technique (calcul, inégalités). Le jury recommande aux futurs admissibles de travailler ces deux points, plus spécifiquement le premier.

## III

### Filière PC

96. Les candidats sont généralement à l'aise au tableau et la connaissance du cours est généralement correcte. On constate cependant que quelques candidats sont vraiment très faibles et n'ont pas acquis les bases du programme de PC.

97. Voici quelques remarques plus précises. Sont mal maîtrisées en général :

- les exercices simples, mais moins classiques,
- les démonstrations de résultats de cours.

Plus spécifiquement les notions suivantes :

97.1 En analyse :

- les sommes de Riemann ;
- le calcul différentiel ;
- les développements asymptotiques ;
- la notion de convergence uniforme ;
- la manipulation d'inégalités.

97.2 En algèbre

- algorithme de Gram-Schmidt ;
- la pratique de la réduction.

97.3 En probabilités

- les problèmes de dénombrement ;
- la traduction en termes d'événements.