[12] On considère une série de fonctions $\sum u_n$ définies sur Ω (= un intervalle de $\mathbb{R}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$...) à valeurs dans un espace vectoriel F normé par $\|\cdot\|$.

► On **suppose** que cette série de fonctions *converge simplement* sur un domaine $\mathcal{V} \subset \Omega$. Le *reste d'ordre* n est donc défini sur Ω :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ **converge uniformément sur** $\mathcal{V}$ si, et seulement si, **[Ch.11 - 74]** la suite des restes converge uniformément sur $\mathcal{V}$ vers la fonction nulle :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathcal{V}} \left\|R_n(x)\right\| = 0.$$

En théorie **[Ch.11 - 19]**, il s'agit donc de trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \left\|R_n(x)\right\| \leqslant \varepsilon_n}_{\text{majorant indépendant de } x}$$

et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0. \qquad \text{et de limite nulle}$$

► **Méthodes pratiques**

En pratique, il y a trois grandes manières de procéder :
– ou bien on sait calculer exactement le reste (très rare) ;
– ou bien on majore le reste sans le calculer ;
– ou bien on ne s'encombre même pas avec le reste.

Voici maintenant les déclinaisons concrètes de ces trois familles de méthodes.

▷ **Convergence normale :**

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathcal{V}$, alors elle converge uniformément sur $\mathcal{V}$.

Comme cette méthode est expéditive, c'est celle qu'on doit appliquer en priorité.

Avantages : *On se contente de majorer le terme général sans s'occuper du reste* R_n.
Inconvénients : *La convergence normale est strictement plus forte que la convergence uniforme et implique aussi la convergence absolue pour tout* $x \in \mathcal{V}$.

Cette méthode ne sert donc à rien si on étudie une série qui converge uniformément sans converger normalement. Mais, au moins, on n'aura pas perdu beaucoup de temps en cas d'échec.

▷ **Méthodes spécifiques :**

On trouvera plus loin une discussion spécifique au cas des séries entières.

Inconvénients : *Ces méthodes ne s'appliquent qu'à des types très particuliers de séries.*
Avantages : *Si on reconnaît rapidement un tel type de série, on dispose alors d'un outil fait sur mesure !*

❧ Dans le cas d'une **série géométrique** ou, plus généralement, d'une **série télescopique**, on peut calculer explicitement le reste $R_n(x)$.

Il n'y a plus qu'à majorer le reste par une quantité indépendante de $x \in \mathcal{V}$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Dans le cas d'une **série alternée**, $\boxed{\text{si}}$ les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont remplies, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \Omega, \quad \left|R_n(x)\right| \leqslant \left|u_{n+1}(x)\right|.$$

Il reste alors à trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\forall\, x \in \mathcal{V}, \quad \left|u_n(x)\right| \leqslant \varepsilon_n}_{\text{majorant indépendant de } x}$$

et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0. \qquad \text{et de limite nulle}$$

▷ **En dernier recours :**

Si aucune des méthodes précédentes ne s'applique... il convient de rester actif !

Si on vous donne des indications, faites en sorte de les suivre.

Si on vous laisse vous débrouiller et que rien de ce qui précède ne s'applique, c'est peut-être que la série de fonctions ne converge pas uniformément...

► **Méthodes spécifiques aux séries entières**

▷ Dans le cas particulier d'une **série entière**, si $\mathcal{V}$ est un segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence, la méthode expéditive consiste à citer le théorème **[Ch.12 - 38.2]**.

*Mais si $\mathcal{V}$ est l'intervalle ouvert de convergence lui-même, il faut arriver à s'abstenir d'appliquer **[Ch.12 - 38.2]** et tenter d'appliquer **[Ch.12 - 37]**.*

▷ Si la série entière ne converge pas normalement sur $]-R, R[$ **[Ch.12 - 37]**, elle converge peut-être uniformément sur cet intervalle. Pour ce faire, on peut parfois appliquer le Critère spécial des séries alternées **[Ch.12 - 39.2]**.

▷ Le reste d'ordre n d'une série entière peut être calculé explicitement grâce à la formule de Taylor avec reste intégral !

On peut alors chercher une majoration précise du reste ou se contenter d'étudier la majoration plus grossière donnée par l'inégalité de Taylor-Lagrange **[Ch.12 - 51]**.

[13] Une série $\sum u_n$ de fonctions bornées sur Ω converge normalement sur Ω si, et seulement si, la série numérique de terme général

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \left\|u_n(x)\right\|$$

est convergente.

Méthodes pratiques pour la convergence normale

► On cherche en général une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\forall\, x \in \Omega, \quad \left\|u_n(x)\right\| \leqslant M_n}_{\text{majorant indépendant de } x}$$

et telle que la série $\sum M_n$ des majorants soit convergente.

► Parfois, une majoration directe n'est pas simple et on doit calculer $\|u_n\|_\infty$ (par une étude de fonction) avant de vérifier que la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

[14] L'étude de la convergence uniforme ou de la convergence normale repose toujours sur une majoration uniforme en x (soit une majoration uniforme du reste, soit une majoration uniforme du terme général).

Ne pas préciser le domaine V sur lequel on annonce la convergence uniforme ou normale revient exactement à écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \boxed{\forall\, x}, \qquad \left|...(x)\right| \leqslant v_n$$

et, désolé, *ce n'est pas faire montre de psychorigidité !* cela ne veut rien dire.

En pratique Pour démontrer que la somme S de la série de fonctions est de classe $\mathscr{C}^n$ sur Ω (avec $0 \leqslant n \leqslant \infty$), les différents théorèmes **[Ch.11 - 90, 107]** exigent une sorte de convergence uniforme, mais en aucun cas il n'est nécessaire de prouver l'uniformité sur Ω.

Il s'agit alors de définir un recouvrement

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$$

où les $\mathcal{V}_i$ sont choisis pour obtenir facilement la convergence uniforme sur chaque domaine $\mathcal{V}_i$.

[15] Exemples usuels d'espaces vectoriels de dimension finie : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (les plus fréquemment rencontrés cette année) ; $\mathbb{R}^d$ et $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ (séries de vecteurs et de matrices, cf exponentielle de matrice) ; $\mathbb{R}_d[X]$ (pas vu cette année, mais pourquoi pas ?).

[16] Si la suite de fonctions continues $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur un intervalle borné I, alors la limite u est continue sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_I u_n(t)\,dt - \int_I u(t)\,dt \right| = \left| \int_I u_n(t) - u(t)\,dt \right| \leqslant |I| \cdot \|u_n - u\|_\infty$$

où $|I| \in \mathbb{R}$ est la longueur (finie !) de l'intervalle I. On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I u_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n \to +\infty} u_n(t)\,dt.$$

Si l'intervalle I n'est pas borné, la majoration précédente est encore vraie, mais inutile puisque la longueur $|I|$ de l'intervalle est infinie...

[17] Je vous laisse faire vous-mêmes cette activité de synthèse, je me tiens à votre disposition pour contrôler ou compléter votre travail.

[18] La *règle de D'Alembert pour les séries entières* consiste à former le rapport

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

et à en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Bizarrement, le rapport ne dit que pas que cette règle est **hors-programme** (et son emploi est durement sanctionné à Centrale par exemple).

[18.1] Une **série lacunaire** est une série entière $\sum a_n z^n$ qui possède une infinité de coefficients a_n nuls (penser aux DSE de sin ou cos).

Pour une telle série, étudier la limite du rapport a_{n+1}/a_n n'a donc aucun sens !

❧ Cependant, en posant $u_n = \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ avec $z \neq 0$, on peut simplifier

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|^2}{2(n+1)(2n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et déduire de la règle de D'Alembert (celle qui est au programme) que la série $\sum u_n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, ce qui nous assure que le rayon de convergence de la série entière est infini.

❧ Autres exemples de séries lacunaires : **[Ch.12 - 16.1,2]**.

❧ Pour la série entière $\sum \cos nz^n$, on peut poser $u_n = \cos nz^n$ et admettre que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \neq 0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cos(n+1)}{\cos n} z$$

et on constate que cette expression *n'a pas de limite* lorsque n tend vers $+\infty$. (Ça se devine facilement, ça ne se prouve pas si rapidement !)

Dans ces conditions, il est impossible d'invoquer la règle de D'Alembert.

Cependant, pour $|z| < 1$, il est clair que

$$\cos nz^n \underset{n\to+\infty}{=} o(z^n)$$

donc la série $\sum \cos nz^n$ converge absolument et $R \geqslant 1$. D'autre part, pour $z = 1$, la suite de terme général $\cos nz^n = \cos n$ ne tend pas vers 0 (*sinon, ça se saurait !*) donc $R \leqslant 1$.

On a démontré, sans trop de peine, que $R = 1$.

[19] $\boxed{\textbf{La}}$ **bonne manière d'utiliser la règle de D'Alembert**

Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{R}.$$

On en déduit que, pour tout $z \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}z^{n+1}}{u_n z^n}\right| = \frac{|z|}{R}.$$

NB : *La discussion suivante, quoique simpliste, doit* impérativement *figurer dans vos copies !*

On applique la règle de D'Alembert :

– pour $|z| < R$, la série $\sum u_n z^n$ converge absolument ;
– pour $|z| >$, la série $\sum u_n z^n$ diverge grossièrement

donc R est bien le rayon de convergence de la série entière.

❧ La réciproque est fausse : il se peut que le quotient n'ait pas de limite ; il se peut même qu'il ne soit pas défini pour tout n assez grand !

❧ En pratique, si on étudie une série entière de rayon de convergence $R > 0$ sans en connaître les coefficients, les seules propriétés dont on dispose sont **[Ch.12 - 8 et 10]** (et tout ce qui peut s'en déduire).

[19.1] L'équivalence est fausse en général.

D'après la règle de D'Alembert, si $\ell|z| < 1$ (inégalité *stricte*), alors la série $\sum a_n z^n$ converge (absolument).

Réciproquement (contraposée de la règle de D'Alembert), si la série $\sum a_n z^n$ converge, alors $\ell|z| \leqslant 1$ (inégalité *large*).

❧ Attention, pour certains coefficients a_n particuliers, la convergence de la série peut très bien être équivalente à $\ell|z| < 1$ tout comme elle peut aussi être équivalente à $\ell|z| \leqslant 1$...

[20] Pour une série entière $\sum a_n z^n$, on a

$$\sup_{|z|<R} |a_n z^n| = |a_n|\, R^n.$$

❧ La série entière

$$\sum \frac{z^n}{n^2}$$

converge normalement sur le disque unité fermé.

❧ La série entière
$$\sum z^n$$
converge normalement sur tout disque fermé contenu dans le disque unité ouvert, mais ne converge pas normalement sur le disque unité ouvert.
❧ La série entière
$$\sum \frac{z^n}{n}$$
converge uniformément sur $[-R, 0]$ (CSSA), mais elle ne converge pas normalement sur le disque unité ouvert.
❧ Si le rayon de convergence est infini, une série entière ne converge pas uniformément sur $\mathbb{C}$ — à moins que les coefficients a_n ne soient tous nuls à partir d'un certain rang (et que la somme de la série entière soit donc un polynôme).

Si le rayon de convergence est infini, une série entière ne converge pas normalement sur $\mathbb{C}$ — à moins que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (et que la somme de la série entière soit une constante).