TPE MP - 1178

❧ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \mathbf{E}\big[(X-x)^2\big] = x^2 - 2x\,\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X^2).$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif. Il atteint donc son minimum pour

$$x = \frac{-[-2\,\mathbf{E}(X)]}{2 \times 1} = \mathbf{E}(X)$$

et ce minimum est égal à

$$\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{V}(X).$$

❧ Comme $a \leqslant X(\omega) \leqslant b$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \Big(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2$$

et d'après la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \min_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) \\ &\leqslant \varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \mathbf{E}\Big[\Big(X(\omega) - \frac{a+b}{2}\Big)^2\Big] \\ &\leqslant \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2.\end{aligned}$$