❧ Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction

$$\frac{1}{1+X}$$

est bien définie, à valeurs dans $[0,1]$, donc c'est une variable aléatoire (en tant que fonction d'une variable aléatoire) d'espérance finie.

D'après la Formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-\lambda}(e^\lambda-1)}{\lambda}\\ &= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.\end{aligned}$$

❧ L'entier $X(\omega)$ est pair si, et seulement si,

$$\omega \in \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}[X=2k].$$

Par σ-additivité, la probabilité pour que X soit pair est égale à

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=2k) &= \sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda = e^{-\lambda}\cdot\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2}\\ &= \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.\end{aligned}$$

Il y a donc un peu plus d'une chance sur deux pour que X soit paire et cette probabilité est d'autant plus élevée que le paramètre λ (= l'espérance de X) est proche de 0. (C'est normal : plus λ est proche de 0, plus la probabilité $\mathbf{P}(X=0)$ est proche de 1 !)