Autres écoles PC - 1296

1. Comme la sous-algèbre $\mathbb{C}[J]$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ est commutative, les matrices $M(a, b, c)$ (qui sont toutes des polynômes en J) commutent entre elles.

✍ *Comme $J^3 = I_3$, alors*

$$\mathbb{C}[J] = \mathrm{Vect}(I_3, J, J^2).$$

Mais cela ne sert à rien pour répondre à la question !

2. Comme $J^3 = I_3$ et que le polynôme annulateur

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$$

est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice J est diagonalisable.

❧ Considérons une valeur propre λ de J et une colonne propre

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

associée à cette valeur propre. On a alors

$$JX = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

donc

$$b = \lambda a \quad \text{et} \quad c = \lambda b = \lambda^2 a.$$

✍ *On a aussi $a = \lambda^3 a$ sur la troisième ligne, mais comme λ est une racine cubique de l'unité, c'est sans importance !*

❧ Comme $j^4 = j$, les colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de J associés respectivement aux valeurs propres 1, j et j^2.

❧ Comme $J \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, ce sont des valeurs propres simples et les sous-espaces propres sont donc des droites.

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(J - I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - jI_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Ker}(J - j^2 I_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

3. D'après la question précédente, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

la matrice P est inversible et

$$P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(1, j, j^2).$$

On en déduit que

$$P^{-1}J^2P = \mathrm{Diag}(1, j^2, j)$$

et donc que

$$P^{-1}M(a,b,c)P = \mathrm{Diag}(a+b+c, a+bj+cj^2, a+bj^2+cj).$$

Autrement dit, la base de vecteurs propres qu'on a trouvée pour J est une base de vecteurs propres pour chacune des matrices $M(a,b,c)$ et

$$\mathrm{Sp}\big(M(a,b,c)\big) = \big\{a+b+c,\ a+bj+cj^2,\ a+bj^2+cj\big\}.$$

✍ *La même démarche peut s'appliquer en dimension n, avec les racines n-ièmes de l'unité (et toujours une matrice de Vandermonde en guise de matrice de passage vers une base de vecteurs propres).*