St Cyr PSI - 1273

Q 1) – On modélise l'expérience par une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/6$ (on cherche à obtenir une face parmi les six faces du dé).

La variable aléatoire T vérifie alors

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad [T = k] = [B_1 = 0, \dots, B_{k-1} = 0, B_k = 1]$$

et on déduit de notre modèle que T suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/6$.

D'après le cours,

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{p} = 6, \quad \mathbf{V}(T) = \frac{q}{p^2} = 30.$$

Q 2) – La fonction `rd.randint(1, 7)` permet de simuler un échantillon i.i.d. de variables suivant la loi uniforme sur $[\![1, 7[\![= [\![1, 6]\!]$. On lance le dé tant qu'on n'a pas vu apparaître la valeur choisie et on compte le nombre de lancers.

```
import numpy.random as rd

# on lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne 5
def T():
    Nb_lancers = 1
    while rd.randint(1, 7)!=5:
        Nb_lancers += 1
    return Nb_lancers
```

Q 4) – Chaque dé est associé à une variable aléatoire T_i de loi $\mathscr{G}(1/6)$ et on suppose que les quatres variables T_1, T_2, T_3 et T_4 sont indépendantes.

Le nombre N de lancers nécessaires pour que chaque dé ait amené au moins une fois 5 est alors défini par

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad N(\omega) = \max\{T_1(\omega), T_2(\omega), T_3(\omega), T_4(\omega)\}.$$

❧ La simulation de N est directe.

```
def N():
    L = [ T() for i in range(4) ]
    return max(L)
```

❧ Pour en déduire une valeur approchée de l'espérance de N, on applique la Loi des grands nombres : si $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de N, alors la moyenne empirique

$$\frac{N_1 + \cdots + N_n}{n}$$

devient de plus en plus proche de $\mathbf{E}(N)$.

```
def moy_emp(va, n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S += va()
    return S/n
```

Avec `moy_emp(T, 1000)`, je trouve 6, 105, ce qui est assez proche de $1/p = 6$.

Avec `moy_emp(N, 1000)`, je trouve 11, 866 mais la valeur exacte de $\mathbf{E}(N)$ est encore inconnue.

REMARQUE.— Les valeurs trouvées varient d'une fois sur l'autre, au gré du générateur aléatoire...

Q 4) – Il est clair que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad [N \leqslant k] = [T_1 \leqslant n, T_2 \leqslant n, T_3 \leqslant n, T_4 \leqslant n]$$

et comme les variables T_i sont indépendantes et de même loi, on en déduit que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(N \leqslant k) = [\mathbf{P}(T \leqslant k)]^4.$$

Comme T suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, on sait que

$$\mathbf{P}(T \leqslant k) = 1 - \mathbf{P}(T > k) = 1 - q^k.$$

On *admet* (exercice classique, cette indication sera probablement donnée par l'examinateur) que

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N \geqslant k) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N > k)$$

et donc que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - (1 - q^k)^4 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 4q^k - 6q^{2k} + 4q^{3k} - q^{4k} \\
&= 1 + \frac{4q}{p} - \frac{6q^2}{1-q^2} + \frac{4q^3}{1-q^3} - \frac{q^4}{1-q^4}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{E}(N) \approx 11{,}926\,696\,254\,565$, ce qui est conforme à la valeur approchée calculée plus haut.