IMT PSI - 1275

Q 1) – On modélise l'expérience par une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

Si on voit apparaître Pile pour la *deuxième* fois au k-ième lancer, alors le nombre k de lancers est au moins égal à 2 et le nombre de Face qui sont apparus entre temps est égal à

$$X = (k-2) \in \mathbb{N}.$$

On peut exprimer l'événement $[X = k-2]$ au moyen des variables aléatoires $B_1, \dots, B_k$ qui modélisent les k premiers lancers :

$$[X = k-2] = \bigsqcup_{1\leqslant i\leqslant k-1} [B_1 = 0, \dots, B_i = 1, \dots, B_{k-1} = 0, B_k = 1]. \quad (1)$$

On en déduit que, pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}(X = k-2) = \sum_{1\leqslant i<k} p^{i-1} q p^{(k-1)-i} q = (k-1)p^{k-2}q^2$$

c'est-à-dire

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = (k+1)p^k q^2.$$

Q 2) – Le calcul de l'espérance est l'occasion de calculer la fonction génératrice de cette variable aléatoire. (Le calcul direct de l'espérance repose sur les mêmes calculs de séries entières.)

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t^X) = q^2 \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)p^k t^k &= \frac{q^2}{p}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(pt)^k\right) &&(\star)\\ &= \frac{q^2}{p}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-pt}\right)\\ &= \frac{q^2}{p}\frac{p}{(1-pt)^2} = \frac{q^2}{(1-pt)^2}.\end{aligned}$$

(On notera le choix judicieux de la constante d'intégration en $(\star)$, qui simplifie le calcul de la dérivée venant ensuite.)

En particulier, pour $p = 1/2$,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \mathbf{E}(t^X) = \frac{1}{(2-t)^2}.$$

Cette expression est dérivable en $t = 1$, ce qui prouve que X est une variable aléatoire d'espérance finie et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \frac{d\,\mathbf{E}(t^X)}{dt} = \frac{2}{(2-t)^3}$$

donc $\mathbf{E}(X) = 2$ (pour $t = 1$).

Q 3) – Pour simuler la variable aléatoire X, on utilise `rd.randint(0, 2)`, qui simule un échantillon i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $1/2$. En comptant le nombre d'échecs qui précède le premier succès, on compte le nombre T de Face qui précèdent le premier Pile.

Avec deux simulations successives, on reproduit le comportement de deux variables aléatoires indépendantes et de même loi T_1 et T_2 : le nombre de Face qui précèdent le *second* Pile est égal (en loi) à $T_1 + T_2$.

La relation (1) peut en effet s'interpréter sous la forme :

$$\begin{aligned}[X = k-2] &= \bigsqcup_{1 \leqslant i < k} [T_1 = i-1] \cap [T_2 = k-(i-1)] \\ &= [T_1 + T_2 = k-2].\end{aligned}$$

```
import numpy.random as rd

def T():
    nb_echecs = 0
    while rd.randint(0, 2)!=1:
        nb_echecs += 1
    return nb_echecs

def X():
    return T()+T()
```

On fait ensuite confiance à la Loi des grands nombres pour obtenir facilement une valeur approchée de l'espérance de X : il suffit de calculer la moyenne des valeurs renvoyées par la fonction `X()` sur un grand nombre d'appels.

```
def moy_emp(va, n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S += va()
    return S/n
```

On trouve effectivement une valeur proche de 2.