Mines Ponts MP - 537

(a) Soient a et b, deux points adhérents à C : il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telles que

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \quad \text{et} \quad b = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)a + tb = \lim_{n\to+\infty} (1-t)x_n + ty_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $(1-t)x_n + ty_n$ appartient à C (puisque C est convexe) et par conséquent le point $(1-t)a+tb$ appartient à l'adhérence de C pour tout $t \in [0,1]$ (en tant que limite d'une suite de points de C).

On a ainsi démontré que l'adhérence $\overline{C}$ de C était convexe.

(b) Contrairement à la question précédente, il faut impérativement traiter cet exerice en s'appuyant sur une **figure**.

❧ Soient a et b, deux points de l'intérieur de C : il existe donc un réel $r > 0$ tel que

$$B(a,r) \subset C \quad \text{et} \quad B(b,r) \subset C.$$

REMARQUE.— A priori, on a un rayon $r_1 > 0$ pour a et un rayon $r_2 > 0$ pour b. Nous avons choisi $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$ en remarquant que

$$B(a,r) \subset B(a,r_1) \quad \text{et} \quad B(b,r) \subset B(b,r_2).$$

Pour $t \in [0,1]$, on pose

$$z_t = (1-t)a + tb \in C$$

et on considère un point $\omega \in E$ tel que

$$\|\omega - z_t\| \leqslant r.$$

Nous allons montrer que $\omega \in C$ et donc que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui prouvera que C est aussi un voisinage de z_t et donc que z_t appartient bien à l'intérieur de C.

On pose $u = \omega - z_t$ de telle sorte que $\omega = z_t + u$. On a

$$\big\|(a+u) - a\big\| = \|u\| \leqslant r \quad \text{et} \quad \big\|(b+u) - b\big\| = \|u\| \leqslant r$$

donc $(a+u) \in B(a,r) \subset C$ et $(b+u) \in B(b,r) \subset C$. Mais

$$\begin{aligned} \omega = (z_t + u) &= [(1-t)a + tb] + [(1-t)u + tu] \\ &= (1-t)(a+u) + t(b+u) \in C \end{aligned}$$

(en tant que combinaison convexe de deux points de C).

On a ainsi démontré que $B(z_t, r) \subset C$, ce qui signifie que C est un voisinage de z_t. Autrement dit, on a démontré que z_t appartenait à l'intérieur de C pour tout $t \in [0,1]$, ce qui prouve que l'intérieur de C est convexe.