ORAL MINES–TELECOM

Planche 1

1.1 ❦

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, la matrice définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

1.2 ❦

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t \, dt.$$

1. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

Planche 2

2.1 ❦

Soit u, un endomorphisme nilpotent de E, espace vectoriel de dimension n : il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que u^p soit égal à l'endomorphisme nul.

On suppose que x est un vecteur de E et k, un entier naturel tel que $u^k(x)$ soit différent du vecteur nul.
1. Démontrer que la famille

$$\big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$$

est libre.
2. On considère l'endomorphisme e^u défini par

$$e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

(Il s'agit en fait d'une somme finie puisque u^k est nul quand k est supérieur ou égal à p.) Déterminer $\operatorname{Ker}(e^u - \mathrm{Id}_E)$.

2.2 ❦

On considère un réel $a > 1$. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'expression

$$\big((a+1)a^{1/n} - a(a+1)^{1/n}\big)^n.$$

Planche 3

3.1 ❦

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme $f(x)$ de la série entière

$$\sum \frac{x^n}{2n+1}.$$

3.2 ❦

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Planche 4

4.1 ❦

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On notera x_n cette solution.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.
3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.
5. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.

4.2 ❦

Déterminer les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A.A^T.A = I_n.$$

Planche 5

5.1 ❦

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\{0,1\}$. On suppose que

$$\mathbf{P}(X_0 = 1) = 1,$$

que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = 0,2 \qquad \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 0,4$$

et on note

$$x_n = \mathbf{P}(X_n = 1).$$

1. Déterminer x_1 et x_2.
2. Déterminer une relation de récurrence entre x_n et x_{n+1}.
3. Déterminer x_n en fonction de n.

5.2 ❦

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$A^T = -A.$$

1. Déterminer les valeurs propres réelles possibles pour A.
2. En déduire que les matrices $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles.
3. Démontrer que la matrice

$$M = (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$$

est orthogonale.

Oral Mines–Telecom (Indications)

1.1 ❦

On peut chercher directement le polynôme minimal de A — au cas où il serait assez simple pour conclure.

Ne serait-il pas possible de relier A à une matrice *très connue* ?

1.2 ❦

1. Un grand classique !
2. La méthode usuelle pour relier $f'(x)$ et $f(x)$ consiste à intégrer par parties.

2.1 ❦

1. Classique ! On peut procéder par récurrence (finie) ou éviter la récurrence en choisissant un bon indice...
2. Il est intéressant de faire le lien avec la question précédente.

2.2 ❦

Il faut avoir bien assimilé les préceptes du grand René Descartes pour se tirer d'affaire : ce n'est pas très difficile, mais on doit être sacrément bien organisé pour trouver le résultat.

3.1 ❦

Est-il possible de relier cette série entière à la série entière suivante ?

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

3.2 ❦

On peut supposer que le polynôme caractéristique de A est scindé et en déduire le polynôme caractéristique de A^{-1} : comment ?

Mais on cherche en fait à exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} *très simplement* en fonction de celui de A sans avoir à factoriser le polynôme caractéristique de A.

4.1 ❦

1. Exemple typique d'application du Théorème de la bijection. (Inutile de trop en faire, on ne s'intéresse pas aux propriétés de la bijection réciproque.)
2. Question archi-classique. La méthode usuelle consiste à remarquer que

$$f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

et à étudier le signe de $f_n(x_{n+1})$ ou celui de $f_{n+1}(x_n)$ pour parvenir à situer x_{n+1} par rapport à x_n en utilisant la monotonie de f_n (ou de f_{n+1}).
3. Attention, il ne s'agit pas d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$! Pas d'histoire de point fixe en vue...

Le passage à la limite dans la relation $f_n(x_n) = 0$ doit être justifié avec soin. Si on connaît très bien son cours, on est tenté de parler de convergence uniforme pour la suite des fonctions f_n — mais ici, ce ne serait pas une bonne idée...
5. Le plus difficile est de résister à la tentation de composer des équivalents !

4.2 ❦

Ce serait tellement plus simple si la matrice A était symétrique ! Mais c'est juste un rêve...

$\boxed{\textbf{5.1}\ ❦}$

1. Question inutile, autant traiter tout de suite la question suivante !

2. Application typique de la formule des probabilités totales.

$\boxed{\textbf{5.2}\ ❦}$

1. Pour les matrices symétriques ou antisymétriques, il faut toujours s'intéresser à la forme bilinéaire $X^T.A.Y$ ou à la forme quadratique $X^T.A.X$ (même si ce n'est plus vraiment au programme).

3. Encore une occasion d'appliquer les bons principes du grand René Descartes !

Oral Mines–Telecom (Solutions)

1.1 ❦

On note J_n, la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, de telle sorte que
$$A = J_n - I_n.$$
On sait que $J_n^2 = nJ_n$, donc que
$$(A + I_n)^2 = n(A + I_n)$$
et donc que
$$A^2 + (2 - n)A + (1 - n)I_n = 0_n.$$
On en déduit que
$$A\big(A + (2 - n)I_n\big) = (n - 1)I_n.$$
La matrice A est donc inversible et son inverse est égal à
$$\frac{1}{n-1}A + \frac{2-n}{n-1}I_n.$$

1.2 ❦

1. On pose
$$g(x, t) = e^{-xt} \ell n\, t$$
pour tout $t \in I =]0, +\infty[$ et tout $x \in \Omega =]0, +\infty[$.

Il est clair que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto g(x, t)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω ;
- pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto g(x, t)]$ est continue sur I ; équivalente à $\ell n\, t$, et donc intégrable, au voisinage de 0 ; dominée par $e^{-xt/2}$ avec $x/2 > 0$, et donc intégrable, au voisinage de $+\infty$;
- pour tout $x \in \Omega$, la fonction
$$\left[t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -t\, \ell n\, t\, e^{-xt}\right]$$
est continue sur I ; tend vers 0, et donc intégrable, au voisinage de 0 ; dominée par $e^{-xt/2}$, et donc intégrable, au voisinage de $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $a > 0$,
$$\forall\, x \geqslant a,\ \forall\, t \in I, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant t|\ell n\, t|\, e^{-at} = \left|\frac{\partial g}{\partial x}(a, t)\right|.$$
Le majorant est indépendant de $x \geqslant a$ et intégrable sur I (en tant que fonction de t), donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$: pour tout $a > 0$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et
$$\forall\, x \geqslant a, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\, dt.$$

❧ Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur
$$I = \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$$
et
$$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\, \ell n\, t\, e^{-xt}\, dt.$$

2. On intègre par parties en posant

$$u(t) = t\,\ell n\,t \quad \text{et} \quad v'(t) = -e^{-xt}.$$

On choisit

$$v(t) = \frac{1}{x}\,e^{-xt}$$

et il est clair que $u(t)v(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt$$

est convergente et

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^{+\infty} (1+\ell n\,t)\frac{1}{x}\,e^{-xt}\,dt \\ &= \frac{-1}{x}\,f(x) - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt \end{aligned}$$

donc f est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

REMARQUE.— On peut en déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{K_1 - \ell n\,x}{x}$$

avec $K_1 = f(1)$. On peut démontrer que $f(1) = -\gamma$ (la constante d'Euler), mais ceci est une autre histoire...

2.1 ❦

1. Considérons une relation de liaison

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i u^i(x) = 0$$

en supposant que les scalaires α_i ne sont pas tous nuls.

On considère alors l'indice

$$i_0 = \min\{0 \leqslant i \leqslant k \;:\; \alpha_i \neq 0\}.$$

On a donc, par définition de i_0,

$$\alpha_{i_0} u^{i_0}(x) + \cdots + \alpha_k u^k(x) = 0.$$

Par hypothèse, $u^k(x) \neq 0$ et $u^p(x) = 0$. Il existe donc un, et un seul, indice $k \leqslant d < p$ tel que

$$u^d(x) = 0 \quad \text{et} \quad u^{d+1}(x) = 0.$$

Comme $i_0 \leqslant k \leqslant d$, on peut donc appliquer u^{d-i_0} à notre relation de liaison : il reste

$$\alpha_{i_0} u^d(x) + \alpha_{i_0+1} u^{d+1}(x) + \cdots + \alpha_k u^{k+d-i_0}(x) = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{i_0} u^d(x) = 0$$

puisque $i+d-i_0 \geqslant d+1$ (et donc $u^{i+d-i_0}(x)=0$) pour tout $i>i_0$.

Or $\alpha_{i_0} \neq 0$ (par définition de i_0) et $u^d(x) \neq 0$ (par définition de d) : c'est absurde !

On en déduit que *tous* les α_i sont nuls et donc que la famille

$$\big(x, u(x), \dots, u^k(x)\big)$$

est libre.

REMARQUE.— La principale difficulté consiste à introduire l'indice d (qui *n'est pas* l'indice de nilpotence de l'endomorphisme u).

2. Par définition,

$$e^u - \mathrm{Id}_E = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} u^k.$$

Il est donc clair que

$$\forall\, x \in \operatorname{Ker} u, \quad (e^u - \mathrm{Id}_E)(x) = 0.$$

Réciproquement, en considérant le même indice d que plus haut et en supposant que $x \in \operatorname{Ker}(e^u - \mathrm{Id}_E)$ et que $d \geqslant 1$, on a

$$(e^u - \mathrm{Id}_E)(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{i!} \cdot u^i(x) = 0.$$

D'après la question précédente, la famille

$$\big(x, u(x), \dots, u^d(x)\big)$$

est libre (puisque le vecteur $u^d(x)$ n'est pas nul), ce qui contredit l'existence de la relation de liaison. On en déduit que $d=0$, c'est-à-dire $u^{0+1}(x)=0$, et donc que $x \in \operatorname{Ker} u$.

On a démontré par double inclusion que

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(e^u - \mathrm{Id}_E).$$

2.2 ❦

Posons $b = a+1$, $\alpha = \ell n\, a > 0$ et $\beta = \ell n\, b > \ell n\, a$.

Tout d'abord,

$$(a+1)a^{1/n} = b e^{\alpha/n} = b\Big[1 + \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big].$$

Ensuite, de la même manière,

$$a(1+a)^{1/n} = a e^{\beta/n} = a\Big[1 + \frac{\beta}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(a+1)a^{1/n} - a(a+1)^{1/n} &= (b-a) + \frac{\alpha b - \beta a}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\ &= 1 + \frac{\gamma}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

avec $\gamma = \alpha b - \beta a$.

On en déduit, avec la méthode habituelle, que

$$\begin{aligned}\big[(a+1)a^{1/n} - a(a+1)^{1/n}\big]^n &= \Big[1 + \frac{\gamma}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]^n\\ &= \exp\Big\{n\,\ell n\Big[1 + \frac{\gamma}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big]\Big\}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\gamma)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \big[(a+1)a^{1/n} - a(a+1)^{1/n}\big]^n = \frac{a^b}{b^a} = \frac{a^{a+1}}{(a+1)^a}.$$

3.1 ❦

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{x^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^n}\right| = \frac{2n+1}{2n+3}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

D'après la règle de D'Alembert,
- pour $|x| < 1$, la série converge absolument ;
- pour $|x| > 1$, la série diverge grossièrement.

Par conséquent, le rayon de convergence est égal à 1.

REMARQUE.— La série converge pour $x = -1$ (critère spécial des séries alternées) ; elle diverge pour $x = 1$ (série harmonique).

❧ Pour $|u| < 1$, on pose

$$S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}.$$

(Comme pour la série entière précédente, la règle de D'Alembert nous assure que le rayon de convergence est égal à 1.) Il est clair que $S(0) = 0$ et que

$$\forall\, |u| < 1, \quad S'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\Big).$$

On en déduit que

$$\forall\, |u| < 1, \quad S(u) = \frac{1}{2}\,\ell n\Big(\frac{1+u}{1-u}\Big).$$

REMARQUE.— Si on est savant, on a reconnu Arg th.

Et bien entendu, d'après le cours,

$$\forall\, |u| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} u.$$

❧ Pour $x > 0$, on a $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$ et par conséquent

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ell n\,\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Pour $x < 0$, on a $x^n = (-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}$ et par conséquent

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan}\sqrt{-x}.$$

REMARQUE.— Puisque f est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Que le raccordement autour de $x = 0$ des deux expressions soit $\mathscr{C}^\infty$ ne saute pas vraiment aux yeux !

3.2 ❦

Soit λ, un scalaire non nul. D'après la propriété de morphisme du déterminant,

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - A^{-1}) &= \det\big[(\lambda A - I_n)A^{-1}\big]\\ &= \frac{1}{\det A}\det(\lambda A - I_n)\\ &= \frac{\lambda^n}{\det A}\det\Big(A - \frac{1}{\lambda}I_n\Big)\end{aligned}$$

donc

$$\forall \lambda \neq 0, \quad \chi_A(\lambda) = \frac{\lambda^n}{(-1)^n \det A} \cdot \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Autrement dit, dans le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles,

$$\chi_A = \frac{X^n}{(-1)^n \det A} \cdot \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{X}\right).$$

REMARQUE.— Le dénominateur $(-1)^n \det A$ est en fait le terme constant du polynôme χ_A.

Exemple. Si $\chi_A = X^3 - X^2 - 4X + 4$, alors

$$\chi_{A^{-1}} = X^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{X} - \frac{1}{4X^2} + \frac{1}{4X^3}\right) = X^3 - X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}.$$

REMARQUE.— Si le polynôme caractéristique χ_A est scindé, alors la matrice A est trigonalisable, donc A^{-1} est trigonalisable aussi et on en déduit que : si

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k),$$

alors

$$\chi_{A^{-1}} = \prod_{k=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Avec l'exemple précédent, on a bien

$$X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-2)(X+2)(X-1)$$

et

$$X^3 - X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1).$$

4.1 ❦

1. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0.$$

Par conséquent, la fonction f_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0, 1]$ sur

$$(f_n)_*([0, 1]) = \big[f_n(1), f_n(0)\big].$$

Or $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$, donc il existe un unique réel x_n dans le segment $[0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

REMARQUE.— À partir de $n = 3$, on a $f_n(1) < 0$, donc $0 < x_n < 1$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $n+1 \geqslant 3$, donc $0 < x_{n+1} < 1$. Par conséquent,

$$x_{n+1}^n > x_{n+1}^{n+1} \quad \text{et} \quad -nx_{n+1} > -(n+1)x_{n+1}.$$

Donc

$$f_n(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_{n+1}) = 0.$$

Or $f_n(x_n) = 0$, donc

$$f_n(x_{n+1}) > f_n(x_n)$$

et comme la fonction f_n est strictement décroissante, on en déduit que

$$x_{n+1} < x_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < x_{n+1} < x_n \leqslant 1.$$

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.

3. En tant que suite décroissante et positive, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et sa limite ℓ vérifie

$$0 \leqslant \ell \leqslant x_3 < x_2 = 1.$$

❧ Comme

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad 0 < x_n \leqslant x_3 < 1,$$

on a

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad 0 < x_n^n \leqslant x_3^n$$

et par encadrement x_n^n tend vers 0.

❧ Si $\ell > 0$, alors $-nx_n$ tend vers $-\infty$ et par conséquent

$$f_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1$$

tend vers $-\infty$: c'est absurde (cette quantité est constamment égale à 0).

Il ne reste plus qu'une possibilité : $\ell = 0$.

4. Par définition de x_n,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad nx_n = 1 + x_n^n$$

et d'après la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0.$$

Donc $x_n \sim 1/n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On l'a déjà remarqué :

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad 0 < x_n^n \leqslant x_3^n$$

avec $0 < x_3 < 1$.

Par définition des x_n,

$$\begin{aligned}(nx_n)^n &= (1 + x_n^n)^n \\ &= \exp\bigl[n\,\ell n(1 + x_n^n)\bigr] \\ &= \exp\bigl(\mathcal{O}(nx_3^n)\bigr)\end{aligned}$$

donc $(nx_n)^n$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$x_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}.$$

En écrivant une fois de plus la définition des x_n,

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{x_n^n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\Bigl(\frac{1}{n^{n+1}}\Bigr).$$

4.2 ❦

La relation $A.A^T.A = I_n$ prouve que la matrice A est inversible et que

$$A^{-1} = A^T.A.$$

Or la matrice $A^T.A$ est symétrique, donc A, comme A^{-1}, est symétrique réelle. La relation initiale devient alors $A^3 = I_n$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale D, semblable à la matrice A, et donc telle que D^3 soit semblable à I_n. Par conséquent, $D^3 = I_n$ et comme D est une matrice diagonale réelle, on en déduit que $D = I_n$ et donc que $A = I_n$.

REMARQUE.— Je profite de l'occasion pour rappeler que *seule* la matrice I_n est semblable à I_n.

5.1 ❦

1. Les X_n suivent toutes une loi de Bernoulli. La loi de X_n est caractérisée par le paramètre x_n !

Pourquoi prendre la peine d'exprimer x_1 en fonction de x_0, puis x_2 en fonction de x_1 ?

2. Comme X_n est une variable aléatoire de Bernoulli, le couple

$$\big([X_n = 0], [X_n = 1]\big)$$

est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)\,\mathbf{P}(X_n = 1) + \mathbf{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0)\,\mathbf{P}(X_n \\ &= 0,2x_n + 0,4(1 - x_n) = 0,4 - 0,2x_n.\end{aligned}$$

En particulier, $x_1 = 0,2$ et $x_2 = 0,36$.

3. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de premier terme $x_0 = 1$.

Le point fixe de la suite est le réel ℓ défini par

$$\ell = 0,4 - 0,2\ell$$

c'est-à-dire $\ell = 1/3$. D'après le cours, la suite de terme général $(x_n - \ell)$ est une suite géométrique de raison $(-0,2)$. Donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n - \frac{1}{3} = (-0,2)^n\left(x_0 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot (-0,2)^n.$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/3$.

5.2 ❦

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A. On considère un vecteur propre X associé à λ. On a donc

$$AX = \lambda \cdot X$$

et par suite

$$X^T.A.X = \lambda \cdot X^T.X.$$

On peut transposer cette égalité entre *scalaires* réels.

$$(X^T.A.X) = (X^T.A.X)^T = X^T.A^T.X = -X^T.A.X$$

donc

$$\lambda \cdot X^T.X = X^T.A.X = 0.$$

Or $X \neq 0$ (définition des vecteurs propres), donc

$$X^T.X = \|X\|^2 > 0$$

et finalement $\lambda = 0$.

Le scalaire 0 est la seule valeur propre possible pour la matrice A.

REMARQUE.— La matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est antisymétrique et n'a aucune valeur propre réelle (rotation d'un quart de tour). On peut en déduire des matrices antisymétriques de taille *paire* qui n'ont aucune valeur propre réelle (matrices diagonales par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à la matrice A_2).

REMARQUE.— Une matrice *réelle* de taille *impaire* admet au moins une valeur propre réelle (puisque son polynôme caractéristique est un polynôme à coefficients réels de degré impair, il admet au moins une racine réelle — Théorème des valeurs intermédiaires). De la sorte, une matrice antisymétrique réelle de taille *impaire* admet 0 pour valeur propre.

2. Par définition, la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible si, et seulement si, λ n'est pas une valeur propre de A.

D'après la question précédente, ni 1, ni (-1) n'est valeur propre de A, donc les deux matrices $(A + I_n)$ et $(A - I_n)$ sont inversibles.

3. D'après la question précédente, la matrice M est bien définie.

On va calculer $M^T.M$ en commençant par simplifier M^T.

Tout d'abord

$$\begin{aligned}\left[(A+I_n)(A-I_n)^{-1}\right]^T &= \left[(A-I_n)^{-1}\right]^T.(A+I_n)^T\\ &= (A^T - I_n)^{-1}.(A^T + I_n)\\ &= (-A-I_n)^{-1}.(-A+I_n)\end{aligned}$$

puisque $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$ pour toute matrice inversible B.

Ensuite,

$$(-A-I_n)^{-1}.(-A+I_n) = (A+I_n)^{-1}(A-I_n)$$

puisque $(\lambda B)^{-1} = (1/\lambda) \cdot B^{-1}$ pour tout scalaire non nul λ.

Enfin, comme la matrice $(A + I_n)$ est inversible, l'égalité

$$(A+I_n)^{-1}(A-I_n) = (A-I_n)(A+I_n)^{-1}$$

équivaut à

$$(A-I_n)(A+I_n) = (A+I_n)(A-I_n)$$

(en multipliant *à gauche et à droite* par $(A + I_n)$) et cette égalité est évidente (deux polynômes en A commutent).

Bref :

$$\left[(A+I_n)(A-I_n)^{-1}\right]^T = (A-I_n)(A+I_n)^{-1}$$

et par conséquent

$$M^T.M = (A-I_n)(A+I_n)^{-1}(A+I_n)(A-I_n)^{-1} = I_n.$$

Donc la matrice M est bien orthogonale.