

## I

## Axiome de la borne supérieure

1. Soit  $A$ , une partie de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathfrak{M}(A)$ , l'ensemble des majorants de  $A$  :

$$M \in \mathfrak{M}(A) \iff \forall x \in A, \quad x \leq M$$

et  $\mathfrak{m}(A)$ , l'ensemble des minorants de  $A$  :

$$m \in \mathfrak{m}(A) \iff \forall x \in A, \quad m \leq x.$$

1.1  $\Rightarrow$  Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  admet une **borne supérieure** lorsque l'ensemble  $\mathfrak{M}(A)$  de ses majorants admet un plus petit élément. Dans ce cas,  $\min \mathfrak{M}(A)$  est noté  $\sup(A)$ .

1.2  $\Leftarrow$  Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  admet une **borne inférieure** lorsque l'ensemble  $\mathfrak{m}(A)$  de ses minorants admet un plus grand élément. Dans ce cas,  $\max \mathfrak{m}(A)$  est noté  $\inf(A)$ .

## 2. Borne supérieure et maximum

2.1  $\rightarrow$  Si la partie  $A$  admet un plus grand élément, alors elle admet aussi une borne supérieure et de plus  $\sup(A) = \max(A)$ .

2.2  $\rightarrow$  Si  $A$  admet une borne supérieure et si cette borne appartient à  $A$ , alors c'est le plus grand élément de  $A$ , soit :  $\sup(A) = \max(A)$ .

## 3. Axiome de la borne supérieure

Les deux énoncés suivants sont équivalents.

3.1  $\rightarrow$  Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.

3.2  $\rightarrow$  Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

## 4. Questions pour réfléchir

1. Décrire  $\mathfrak{M}(\emptyset)$  et  $\mathfrak{m}(\emptyset)$ .
2. Condition pour que  $\mathfrak{M}(A)$  (resp.  $\mathfrak{m}(A)$ ) soit une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .
3. Conditions pour qu'une partie admette un plus grand élément?
4. Exemple de partie  $A \subset \mathbb{R}$  admettant une borne supérieure mais pas de plus grand élément?
5. Soient  $A$ , une partie de  $\mathbb{R}$  admettant une borne supérieure  $M$  et  $\varepsilon > 0$ .
  - 5.a Il existe  $x_\varepsilon \in A$  tel que  $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$ .
  - 5.b Existe-t-il  $y_\varepsilon \in A$  tel que  $M - \varepsilon < y_\varepsilon < M$ ?
6. Soient  $f$  et  $g$ , deux fonctions bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} [f(x) + g(x)] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$$

6.b Même si les deux fonctions  $f$  et  $g$  atteignent un maximum, leur somme  $f + g$  n'atteint pas nécessairement un maximum.

7. Condition sur  $A \subset \mathbb{R}$  pour que  $\inf(A) = \sup(A)$ .

## II

## Borne supérieure et inégalités

## 5. Majoration par le sup

5.1  $\rightarrow$  La borne supérieure de  $A$  est un majorant de  $A$  :

$$\forall x \in A, \quad x \leq \sup(A).$$

5.2 Soit  $A \subset \mathbb{R}$ , non vide et majorée. S'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\ell$ , alors  $\ell \leq \sup(A)$ .

5.3  $\rightarrow$  Pour toute partie bornée et non vide  $A \subset \mathbb{R}$ ,

$$\inf(A) \leq \sup(A).$$

## 6. Caractérisation séquentielle

Soit  $A$ , une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ .

6.1 Il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\sup(A)$  et une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\inf(A)$ .

6.2  $\rightarrow$  Un majorant  $M$  de  $A$  est égal à  $\sup(A)$  si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

6.3 Si  $B$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$ , alors il existe une suite d'éléments de  $B$  qui tend vers  $+\infty$ .

## 7. Passage au sup

Connaissant une majoration par une quantité indépendante d'un paramètre  $x$ , on peut **passer au sup** sur ce paramètre.

Cette opération est analogue au **passage à la limite** pour une suite convergente, qui fait passer d'une propriété vraie à partir d'un certain rang à une propriété de la limite.  $\rightarrow$ [5.2]

7.1  $\rightarrow$  Si  $A$  est une partie non vide et majorée par  $M$  :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

alors :

$$\sup(A) \leq M.$$

7.2  $\rightarrow$  Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction majorée par  $M$  :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq M$$

alors

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq M.$$

## 8. Passage à l'inf

8.1  $\rightarrow$  Si  $A$  est une partie non vide et minorée par  $m$  :

$$\forall x \in A, \quad x \geq m$$

alors on peut **passer à l'inf** dans cette inégalité :

$$\inf(A) \geq m.$$

8.2  $\rightarrow$  Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction minorée par  $m$  :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \geq m$$

alors on peut **passer à l'inf** dans cette inégalité :

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq m.$$

9.  $\rightarrow$  Monotonie des opérateurs

Soient  $A$  et  $B$ , deux parties de  $\mathbb{R}$  qui admettent chacune une borne supérieure et une borne inférieure.

Si  $A \subset B$ , alors

$$\inf(B) \leq \inf(A) \quad \text{et} \quad \sup(A) \leq \sup(B).$$

10.  $\rightarrow$  Soit  $A$ , une partie non vide et bornée de  $\mathbb{R}$ .

$$\forall \lambda > 0, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \text{et} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

## II.1 Convergence des suites monotones

11.1  $\rightarrow$  Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite réelle croissante. Si elle est majorée, alors elle converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Dans le cas contraire, elle diverge vers  $+\infty$ .

11.2 → Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite réelle décroissante. Si elle est minorée, alors elle converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Dans le cas contraire, elle diverge vers  $-\infty$ .

## 12. Suites adjacentes

12.1 ↗ Deux suites réelles sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et que leur différence tend vers 0.

12.2 → Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

## 13. → Limites des fonctions monotones

Une fonction monotone  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  admet une limite à gauche finie et une limite à droite finie en chaque point  $x_0$  de l'intervalle  $]a, b[$ . Elle admet aussi une limite à droite, finie ou infinie, au voisinage de  $a$  et une limite à gauche, finie ou infinie, au voisinage de  $b$ .

## II.2 Fonctions bornées

14. ↗ Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée, alors les **bornes** de  $f$  sont définies par :

$$\inf_X f = \inf(f_*(X)) \quad \text{et} \quad \sup_X f = \sup(f_*(X))$$

où  $f_*(X)$  est l'image de  $X$  par  $f$ .

15. ↗ Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée, alors la **norme uniforme** de  $f$  est définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

16. → Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée, alors

$$\forall x \in X, \quad -\|f\|_\infty \leq f(x) \leq \|f\|_\infty.$$

## 17. Cas des suites bornées

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée, alors la norme uniforme de cette suite est définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \|u\|_\infty.$$

## Entraînement

### 18. Questions pour réfléchir

1. Suite de [10] – Examiner les cas  $\lambda = 0$  et  $\lambda < 0$ .
2. On suppose que

$$\forall x \in A, \quad x < M.$$

Comparer  $\sup(A)$  et  $M$  : le passage au sup conserve-t-il les inégalités strictes ?

3. Si  $u_i \leq v_j$  pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in J$ , alors

$$\inf_{i \in I} u_i \leq \sup_{i \in I} u_i \leq \inf_{j \in J} v_j \leq \sup_{j \in J} v_j.$$

Illustrer ce résultat par une figure.

4. Si  $u_i \leq v_i$  pour tout  $i \in I$ , alors

$$\inf_{i \in I} u_i \leq \inf_{i \in I} v_i \quad \text{et} \quad \sup_{i \in I} u_i \leq \sup_{i \in I} v_i.$$

Comparer  $\sup_{i \in I} u_i$  et  $\inf_{i \in I} v_i$  (à l'aide d'une figure).

5. Une suite réelle monotone est convergente si, et seulement si, elle est bornée.
6. Condition pour qu'une suite décroissante soit convergente ? Quelle est alors sa limite ?
7. Une suite positive qui n'est pas bornée tend-elle nécessairement vers  $+\infty$  ?
8. Que dire de deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dont la différence  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de limite nulle ?
9. On considère une fonction  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone. Condition pour que  $f(0^+)$  soit finie ? Cas de la limite en  $+\infty$  ?
19. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite réelle bornée.
- 19.1 La suite de terme général  $M_n = \sup_{p \geq n} |u_p|$  est une suite positive décroissante.
- 19.2 La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 si, et seulement si, la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

20. Soit  $A$ , une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Alors

$$\forall (a, x, y) \in A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \leq |x - y| + |y - a|$$

et l'application  $\varphi$  est 1-lipschitzienne.

## III

### Interversion des bornes

#### 21. Conventions

On fait ici appel aux conventions usuelles :

21.1 Si  $A \subset \mathbb{R}$  n'est pas majorée, alors  $\sup(A) = +\infty$ .

21.2 Si  $A \subset \mathbb{R}$  n'est pas minorée, alors  $\inf(A) = -\infty$ .

21.3 Avec ces conventions, toute suite croissante tend vers sa borne supérieure et toute suite décroissante tend vers sa borne inférieure. →[11]

22. Soit  $(U_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ , une famille réelle.

22.1 Pour tout  $i \in I$ ,

$$\inf_{j \in J} U_{i,j} \leq \inf_{j \in J} \sup_{k \in I} U_{k,j}.$$

22.2 \* Pour toute famille réelle  $(U_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ , bornée ou non,

$$\sup_{i \in I} \inf_{j \in J} U_{i,j} \leq \inf_{j \in J} \sup_{i \in I} U_{i,j}.$$

22.3 Avec

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad U_{i,j} = \frac{i}{i+j},$$

l'inégalité est stricte. Voir aussi [4.102].

22.4 On pose

$$M = \sup_{(i,j) \in I \times J} U_{i,j},$$

que cette quantité soit réelle ou infinie. Si  $M'$  est un réel tel que  $M' < M$ , alors il existe  $i_0 \in I$  et  $j_0 \in J$  tels que

$$M' < U_{i_0, j_0} \leq M$$

donc

$$M' < \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} U_{i,j} \leq M \quad \text{et} \quad M' < \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} U_{i,j} \leq M.$$

22.5 \* Pour toute famille réelle  $(U_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ , bornée ou non,

$$\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} U_{i,j} = \sup_{j \in J} \sup_{i \in I} U_{i,j} \quad \text{et} \quad \inf_{i \in I} \inf_{j \in J} U_{i,j} = \inf_{j \in J} \inf_{i \in I} U_{i,j}.$$

#### 23. Théorème de Fubini positif

23.1 Si  $\sum x_n$  est une série de terme général positif, alors la somme infinie  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$  a un sens, que la série soit convergente ou divergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^N x_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

23.2 Soit  $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ , une famille de réels positifs.

1. Quels que soient  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \in \mathbb{N}$ , on pose

$$U_{i,j} = \sum_{n=0}^i \sum_{p=0}^j u_{n,p} = \sum_{p=0}^j \sum_{n=0}^i u_{n,p}.$$

2. Que la famille  $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$  soit sommable ou non,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right).$$

24. Les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

tendent vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1.

25. La fonction  $G$  définie par

$$\forall x > 0, \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

tend vers  $+\infty$  au voisinage de 0. (On peut poser

$$U_{i,j} = \sum_{n=1}^i \frac{1}{n + n^2 j}$$

pour  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \mathbb{R}_+^*$ .)

26. Les expressions suivantes tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x+t} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$$

(Dans le second cas, on peut poser

$$U_{i,j} = \int_i^{+\infty} \frac{e^{-t}}{j+t} dt$$

pour  $i \in \mathbb{R}_+^*$  et  $j \in \mathbb{R}_+^*$ .)

27. On pourra traiter les exemples suivants à l'aide de la théorie des intégrales fonctions d'un paramètre.

27.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

27.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = 1$$

27.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \ln 2$$

(Pour cet exemple, il suffit d'exploiter la convexité de la fonction exp.)

#### 27.4 Cas général

On suppose que

- quel que soit  $t \in I$ , la fonction  $[x \mapsto f(t, x)]$  est croissante et positive sur  $]a, b[$ ;
- quel que soit  $x \in ]a, b[$ , la fonction  $[t \mapsto f(t, x)]$  est intégrable sur  $I$
- et que les fonctions  $[t \mapsto f(t, a+)]$  et  $[t \mapsto f(t, b-)]$  sont continues par morceaux sur  $I$ .

Alors la fonction

$$F = \left[ x \mapsto \int_I f(t, x) dt \right]$$

est croissante et admet une limite finie en  $a$  (resp. en  $b$ ) si, et seulement si, la fonction  $[t \mapsto f(t, a+)]$  (resp.  $[t \mapsto f(t, b-)]$ ) est intégrable sur  $I$ .

Dans ce cas,

$$F(a+) = \int_I f(t, a+) dt \quad \text{et} \quad F(b-) = \int_I f(t, b-) dt.$$

#### Pour aller plus loin

##### 28. Questions pour réfléchir

1. Si  $A \subset \mathbb{R}$  n'est pas majorée (resp. pas minorée), on pose  $\sup(A) = +\infty$  (resp.  $\inf(A) = -\infty$ ). Discuter la légitimité de cette convention.

2. Comment définir  $\inf(\emptyset)$  et  $\sup(\emptyset)$ ?

3. Suite de [6.1] – Il existe une suite d'éléments de  $A^c$  qui converge vers  $\sup(A)$ .

4. L'opération de passage au sup est-elle une majoration ou une minoration?

5. On suppose que  $A$  admet  $M$  pour borne supérieure.

5.a Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ , alors on peut extraire une suite croissante  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $M$ . Il existe donc une suite croissante d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

5.b Existe-t-il une suite strictement croissante d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ ?

6. L'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{Q}$ . Elle admet une borne supérieure en tant que partie de  $\mathbb{R}$ , mais pas en tant que partie de  $\mathbb{Q}$ .