3
Normes

1. Une **norme** sert à mesurer la distance qui sépare deux points. On peut ainsi définir la notion de **suite convergente**, puis de la notion de **fonction continue**.

I
Norme et distance associée

2. ✍ *Soit E, un espace vectoriel réel ou complexe. Le corps des scalaires est noté $\mathbb{K}$.*
*On appelle **norme sur** E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$*
2.1 *qui **sépare les points** :*

$$N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

2.2 *est **positivement homogène** :*

$$\forall\,(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$

2.3 *et vérifie l'**inégalité triangulaire** :*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

3. Inégalité triangulaire
L'inégalité [**2.3**] peut être généralisée au cas d'une combinaison linéaire quelconque et exprimée sous la forme plus forte de l'encadrement [**3.2**].
3.1 Quels que soient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ dans E et les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,

$$N\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, N(x_k).$$

3.2 ➙ *Si N est une norme sur E, alors*

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$$

quels que soient x et y dans E.

4. Espaces vectoriels normés
4.1 ✍ *Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel E sur lequel est défini une norme N.*
4.2 La restriction d'une norme N sur E à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F.
4.3 ✍ *Soient (E, N), un espace vectoriel normé et F, un sous-espace vectoriel de E. La **norme induite** par N sur le sous-espace F est la restriction de N à F.*

5. Exemples fondamentaux
5.1 La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
5.2 Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ (vu comme un espace vectoriel réel aussi bien que comme un espace vectoriel complexe).
5.3 La norme associée au produit scalaire sur un espace préhilbertien est une norme.

Distance associée à une norme

6. ✍ *La **distance** associée à la norme N sur E est l'application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = N(x-y).$$

7. ➙ *La distance d associée à une norme N est une application*
7.1 ***symétrique** :*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = d(y,x)$$

7.2 *qui **sépare les points** :*

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

7.3 *qui vérifie l'**inégalité triangulaire** :*

$$\forall\,(x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

7.4 *et qui est **invariante par translation** :*

$$\forall\,(x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

8. Parties bornées, fonctions bornées
8.1 ✍ *Une partie A de E est **bornée** pour la norme N lorsque*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in A, \quad N(x) \leqslant M.$$

8.2 ✍ *Une application $f : X \to E$ est **bornée** pour la norme N sur E lorsque son image $f_*(X)$ est une partie bornée de E :*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in X, \quad N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

Sphère unité et boules unité

9. Soit N, une norme sur l'espace vectoriel E.
9.1 ✍ *Un vecteur $x \in E$ est **unitaire** lorsque $N(x) = 1$.*
9.2 ✍ *La **sphère unité** S^1 de (E, N) est définie par*

$$S^1 = \big[N(x) = 1\big].$$

9.3 ➙ *Pour tout vecteur $x \in E$* non nul, *il existe un scalaire $\lambda > 0$ et un vecteur $u \in S^1$ tels que*

$$x = \lambda u.$$

Cette factorisation de x est unique.
9.4 ✍ *La **boule unité (fermée)** B^1_f est définie par*

$$B^1_f = \big[N(x) \leqslant 1\big]$$

*et la **boule unité ouverte** B^1_o par*

$$B^1_o = \big[N(x) < 1\big].$$

10. ➙ *On suppose que $\|\cdot\|$ est la norme associée à un produit scalaire $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ sur E. Pour tout $x \in E$,*

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} \big|\,(\,x\,|\,y\,)\,\big| = \max_{\|y\|\leqslant 1} \big|\,(\,x\,|\,y\,)\,\big|.$$

11. Diamètre d'une partie bornée
11.1 ✍ *Le **diamètre** d'une partie non vide et bornée A de E est défini par*

$$\phi(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x,y).$$

11.2 Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que

$$\phi(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n).$$

Distance à une partie

12.1 ✍ *La **distance d'un point** $x \in E$ **à une partie non vide** A de E est définie par*

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y).$$

12.2 Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$d(x,A) = \lim_{n\to+\infty} d(x,u_n)$$

et une telle suite est bornée.

12.3 La distance de x à une partie A est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x,u_n) = 0.$$

13. ➙ *Soit A, une partie non vide de E.*

$$\forall\ (x,y)\in E\times E,\quad \big|d(x,A)-d(y,A)\big| \leqslant d(x,y).$$

Entraînement

14. Questions pour réfléchir

1. Soient $(F,\|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et $f \in \mathrm{L}(E,F)$. L'application $N_f : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall\ x\in E,\quad N_f(x) = \|f(x)\|$$

est une norme sur E si, et seulement si, f est injective.

2. Un sous-espace vectoriel est-il une partie bornée ?
3. Une intersection de parties bornées est-elle bornée ?
4. Condition pour que l'union d'une famille de parties bornées soit encore bornée.
5. Le complémentaire d'une partie bornée est-il borné ?
6. Une application linéaire est-elle bornée ?
7. Soient N_1 et N_2, deux normes distinctes sur E. Il existe un vecteur $x\in E$ unitaire pour N_1 sans être unitaire pour N_2.
8. Que dire d'un vecteur $x \in E$ dont la norme $N(x)$ ne dépend pas de la norme N définie sur E ?
9. La sphère unité et la boule unité sont-elles des parties bornées ? des sous-espaces vectoriels ?
10. *Suite de* **[10]** –

$$\forall\ x\in E,\quad \|x\| = \sup_{\|y\|<1} \big|\,(\,x\,|\,y\,)\,\big|.$$

11. Que dire de A lorsque $\phi(A)=0$?
12. Quelle que soit la norme N, le diamètre de la sphère unité et celui de la boule unité sont égaux à 2.
13. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne canonique.

13.a Le diamètre de l'ellipse

$$A = \Big[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\Big]$$

est égal à $2\max\{|a|,\ |b|\}$.

13.b Quel est le plus petit cercle dans lequel cette ellipse est inscrite ?

13.c Quel est le plus grand cercle inscrit dans cette ellipse ?

14. Diamètre de l'ensemble

$$A = \big[4x^2+y^2+4z^2 \leqslant 1\big]$$

lorsque $E=\mathbb{R}^3$ est muni de la norme définie par

$$\forall\ u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad N(u) = \sqrt{4x^2+y^2+4z^2}.$$

15. Condition sur l'intervalle $I\subset\mathbb{R}$ pour que

$$d(0,I) = \min_{y\in I} d(0,y).$$

15. Sphère unité dans un espace euclidien

Soit N, la norme associée à un produit scalaire $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ sur $\mathbb{R}^3$.

1. Par quelle équation la sphère unité $S^1(N)$ est-elle représentée dans une base orthonormée pour $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$?
2. Il existe une base $\mathscr{B}_0$ orthonormée pour le produit scalaire *canonique* et trois réels a, b et c, strictement positifs tels que $S^1(N)$ admette

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

pour équation relativement à $\mathscr{B}_0$.

3. Interprétation géométrique.

16. On suppose que $E=\mathbb{R}^2$ est muni de la norme définie par

$$\forall\ u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad N(u) = \sqrt{x^2+3y^2}.$$

1. L'affinité $[(x,y)\mapsto(x,\sqrt{3}y)]$ est une isométrie de $(\mathbb{R}^2,N)$ sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.
2. L'ensemble $A = \big[2x^2+y^2 \leqslant 1\big]$ est une partie bornée pour N, de diamètre $2\sqrt{3}$.

II

Suites

17. Suites convergentes

17.1 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E **converge vers** $a\in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

17.2 Unicité de la limite

Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et vers b pour la même norme $\|\cdot\|$, alors $a=b$.

17.3 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **convergente (pour la norme** $\|\cdot\|$**)** lorsqu'il existe $a\in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

*Dans ce cas, a est **la limite (pour la norme** $\|\cdot\|$**)** de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

17.4 Méthode

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si, et seulement si, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad \|a_n-a\| \leqslant \varepsilon_n.$$

17.5 ✍ *Une suite est **divergente (pour** $\|\cdot\|$**)** lorsqu'elle n'est pas convergente pour $\|\cdot\|$.*

Séries

18. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de E.

18.1 ✍ *La **série** $\sum a_k$ est **convergente (pour la norme** $\|\cdot\|$**)** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **sommes partielles** définies par*

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

est convergente pour la norme $\|\cdot\|$.

18.2 ✍ *Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

*et appelée **somme** de la série $\sum a_k$.*

18.3 ✍ *Si la série $\sum a_k$ est convergente, le **reste d'ordre** n est défini par*

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

18.4 ➙ *Si la série $\sum a_k$ est convergente, alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes converge vers 0_E.*

19. Séries absolument convergentes
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de E.
19.1 ✍ *La série $\sum a_n$ est* ***absolument convergente*** *lorsque la série de terme général positif $\sum \|a_n\|$ est convergente.*
19.2 Si E est un espace vectoriel de dimension *finie*, toute série absolument convergente est une série convergente.
19.3 Un espace vectoriel normé est dit **complet*** lorsque toute série absolument convergente est une série convergente.

II.1 Propriétés des suites convergentes

20. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et toutes les propriétés énoncées sont relatives à la norme $\|\cdot\|$ qui a été choisie.
21.1 Si l'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est lipschitzienne :

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant K\, \|x - y\|_E$$

et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ pour $\|\cdot\|_E$, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) \in F$ pour $\|\cdot\|_F$.
21.2 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite réelle $\big(\|u_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.
21.3 ➙ *Toute suite convergente est bornée.*

22. ➙ *Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $a \in E$, $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*
22.1 *la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a + b)$;*
22.2 *la suite $(\lambda_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (λa).*

23. Suites extraites
23.1 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend aussi vers ℓ.
23.2 Si les deux suites extraites

$$(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$$

convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

24. Valeurs d'adhérence
On connaît le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.
24.1 ✍ *Un élément ℓ de E est une* ***valeur d'adhérence*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.*
24.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour valeur d'adhérence si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geqslant N, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

24.3 Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.
24.4 ➙ *Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{2} u_{2n} = 0.$$

Si a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $-2a$ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

II.2 Relations de comparaison

26. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et on souhaite déterminer avec plus ou moins de précision l'ordre de grandeur d'une suite de vecteurs.
Les suites de référence sont, en général, des suites réelles dont le terme général est strictement positif.

27. Domination
27.1 ✍ *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est* ***dominée*** *par la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$a_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \|a_n\| = \mathcal{O}(\alpha_n)$$

27.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

est bornée.

28. Négligeabilité
28.1 ✍ *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est* ***négligeable*** *devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$a_n = o(\alpha_n) \iff \|a_n\| = o(\alpha_n)$$

28.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

tend vers 0_E.

29. Équivalence
29.1 Si $\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|)$, alors $\|a_n - b_n\| = o(\|a_n\|)$.
29.2 ✍ *Deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs sont* ***équivalentes*** *:*

$$a_n \sim b_n$$

lorsque

$$\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|).$$

29.3 Si $a_n \sim b_n$, alors $\|a_n\| \sim \|b_n\|$ et si la norme est associée à un produit scalaire, alors l'angle formé par les vecteurs a_n et b_n tend vers 0.
29.4 S'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires qui tend vers 1 telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n,$$

alors $a_n \sim b_n$.

II.3 Exemples usuels de normes

30. Normes sur $\mathbb{K}^d$
Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$ sont les suivantes :
30.1 ✍ *La* ***norme euclidienne canonique*** *sur $\mathbb{R}^d$:*

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_d), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

30.2 ✍ *La* ***norme produit*** *sur $\mathbb{K}^d$:*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|$$

et la norme définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|.$$

31. Normes sur des espaces de matrices
De même, l'espace $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices est muni de trois normes usuelles.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

31.1 ✍ *La **norme euclidienne canonique** sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est définie par*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|^2}.$$

31.2 ✍ *Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}| \quad et \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} |a_{i,j}|.$$

32. Normes sur des espaces de suites

32.1 ✍ **Suites bornées**
On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$u \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \iff \exists\, M > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |u_k| \leqslant M.$$

et la norme naturelle sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|.$$

32.2 ✍ **Familles sommables**
*Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ déléments de $\mathbb{K}$ est **sommable** lorsque la série de terme général positif $\sum|u_k|$ est convergente.*
L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^1(\mathbb{K})$ et la norme naturelle sur l'espace $\ell^1(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|.$$

32.3 ✍ **Familles de carré sommable**
*Une suite u d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite **de carré sommable** lorsque la série $\sum u_k^2$ est absolument convergente.*
L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^2(\mathbb{K})$.
La norme naturelle sur $\ell^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2}$$

et sur $\ell^2(\mathbb{C})$ par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}|u_k|^2}.$$

33. Normes sur des espaces de fonctions

33.1 ✍ *Soient (E, N), un espace vectoriel normé et X, un ensemble non vide. La **norme (de la convergence) uniforme (sur X)** sur l'espace $\mathscr{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{B}(X,E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N\big(f(x)\big).$$

33.2 ✍ *L'espace $E = \mathscr{C}^1(I)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $I = [a, b]$ peut être normé par*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} N\big(f(x)\big) \quad ou\ par \quad \|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

33.3 ✍ *La norme canonique sur l'espace $\mathscr{L}^1_c(I)$ des fonctions continues et intégrables sur l'intervalle I, dite **norme de la convergence en moyenne sur** I, est définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^1_c(I), \quad \|f\|_1 = \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

33.4 ✍ *La norme canonique sur l'espace $\mathscr{L}^2_c(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur l'intervalle I, dite **norme de la convergence en moyenne quadratique sur** I, est définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^2_c(I), \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}.$$

II.4 Normes d'algèbre

34. Une algèbre (associative unitaire) est aussi un espace vectoriel, mais certaines normes définies sur une algèbre sont plus utiles que d'autres.

35. ✍ *Soit E, une algèbre associative unitaire. Une norme N sur E est une **norme d'algèbre*** lorsque*

$$N(1_E) = 1 \quad et \quad \forall\,(x,y) \in E\times E, \quad N(xy) \leqslant N(x)N(y).$$

*Une **algèbre normée*** est une algèbre associative unitaire munie d'une norme d'algèbre.*

36. Soit (E, N), une algèbre normée.

36.1 Pour tout $a \in E$: si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite produit $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a\ell$.

36.2 ➙ *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, alors la suite produit $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ab.*

37. Exemples fondamentaux

37.1 $\big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$ et $\big(\mathbb{C}, |\cdot|\big)$ sont deux algèbres normées.

37.2 Si X est un ensemble non vide et (E, N) est une algèbre normée, alors la norme de la convergence uniforme sur X est une norme d'algèbre sur $\mathscr{B}(X, E)$.

37.3 La norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas une norme d'algèbre bien que →**[31.1]**

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

Entraînement

38. Questions pour réfléchir

1. Une suite qui tend vers l'infini n'admet pas de valeur d'adhérence.
2. Une suite qui n'est pas bornée peut-elle admettre une valeur d'adhérence ?
3. L'équivalence des suites de vecteurs est une relation d'équivalence.
4. Si $\|a_n\| \sim \|b_n\|$, les suites de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes ?
5. *Suite de* **[29.4]** – Examiner la réciproque.
6. Représenter les boules unités de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
7. Étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E, on considère sa base duale $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_d^*)$ et on pose

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) = \sum_{k=1}^{d}\big|e_k^*(x)\big| \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant d}\big|e_k^*(x)\big|.$$

Les applications N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.

8. Expression générale des normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^d$.
9. Condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que l'application N_a définie par

$$N_a(u) = \sum_{k=0}^{+\infty}|a_k u_k|$$

soit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{K})$; sur $\ell^1(\mathbb{K})$; sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

10. Condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que l'application N_a définie par

$$N_a(u) = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k u_k|^2}$$

soit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{K})$; sur $\ell^1(\mathbb{K})$; sur $\ell^2(\mathbb{K})$.

11. L'application définie par

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| \, dt$$

ne définit pas une norme sur l'espace $\mathscr{L}^1(I)$ des fonctions intégrables sur I.

12. Condition sur la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ pour que l'application N_g définie par

$$N_g(f) = \int_I |f(t)g(t)| \, dt$$

soit une norme sur $\mathscr{L}^1_c(I)$.

13. Condition sur la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ pour que l'application N_g définie par

$$N_g(f) = \sqrt{\int_I |f(t)g(t)|^2 \, dt}$$

soit une norme sur $\mathscr{L}^2_c(I)$.

III

Applications linéaires

III.1 Applications lipschitziennes

39. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset E$.

39.1 ✍ *Une application $f : \Omega \to F$ est k-**lipschitzienne** lorsque*

$$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x-y\|_E.$$

On note $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de Ω dans F.

39.2 Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est convexe.

39.3

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant k', \quad \mathcal{L}_k(\Omega, F) \subset \mathcal{L}_{k'}(\Omega, F).$$

39.4 ✍ *L'ensemble des applications **lipschitziennes** de Ω dans F est noté $\mathcal{L}(\Omega, F)$ et défini par :*

$$\mathcal{L}(\Omega, F) = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \mathcal{L}_k(\Omega, F).$$

39.5 L'ensemble $\mathcal{L}(\Omega, F)$ est un espace vectoriel.

39.6 Si $f : \Omega \to F$ et $g : F \to G$ sont lipschitziennes, alors la composée $g \circ f : \Omega \to G$ est lipschitzienne.

40. Exemples

40.1 Une fonction constante est 0-lipschitzienne.

40.2 L'application $[x \mapsto \|x\|_E]$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

40.3 Pour tout $a \in E$, l'application $[x \mapsto d(x,a)]$ est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

40.4 Quelle que soit A, partie non vide de E, l'application $[x \mapsto d(x, A)]$ est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$. →**[13]**

40.5 Si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme produit **[30.2]**, alors les applications

$$[(x,y,z) \mapsto x], \quad [(x,y,z) \mapsto y], \quad [(x,y,z) \mapsto z]$$

sont lipschitziennes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

40.6 La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = x - x^2$$

vérifie

$$\forall\, 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \quad |f(x) - f(y)| < |x-y|$$

et appartient à $\mathcal{L}_1([0,1], \mathbb{R})$. Mais quel que soit $0 \leqslant k < 1$, la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}_k([0,1], \mathbb{R})$. →**[58]**

III.2 Continuité des applications linéaires

41. ✍ *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. On note $\mathrm{L}_c(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires lipschitziennes de E dans F.*

42. L'ensemble $\mathrm{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel.

43. ➞ **Caractérisation de** $\mathrm{L}_c(E,F)$

Soit f, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'application f est lipschitzienne sur E.*
2. *Il existe $k > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E.$$

3. *L'application f est bornée sur la sphère unité de E.*
4. *L'application f est bornée sur la boule unité fermée de E.*
5. *L'application f est bornée sur la boule unité ouverte de E.*

44. Propriété de Lipschitz et continuité

On démontrera plus loin qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne.

44.1 On démontre donc qu'une application linéaire T est continue sur E en prouvant l'existence d'une constante $k > 0$ telle que →**[43]**

$$\forall\, x \in E, \quad \|T(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

44.2 Réciproquement, on démontre qu'une application linéaire T n'est pas continue sur E en exhibant une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E tels que

$$\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

45. Exemples

45.1 Que $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ soit muni de la norme $\|\cdot\|_1$, de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ ou de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$, la transposition est continue :

$$\forall\, M \in E, \quad \|{}^tM\| \leqslant \|M\|.$$

45.2 Soient E, un espace préhilbertien réel et $x_0 \in E$. L'application $f = [x \mapsto \langle x_0 \mid x \rangle]$ est continue :

$$\forall\, x \in E, \quad |f(x)| \leqslant \|x_0\| \, \|x\|.$$

45.3 Si l'espace E des suites complexes convergentes est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, l'application L qui, à toute suite $u \in E$, associe sa limite $L(u)$ est continue :

$$\forall\, u \in E, \quad |L(u)| \leqslant \|u\|_\infty.$$

45.4 Si $E = \ell^\infty(\mathbb{K})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les endomorphismes T et D de E définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T(u)_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad D(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

sont continus :

$$\forall\, u \in E, \quad \|T(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty, \quad \|D(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

45.5 Exemples de formes linéaires sur $E = \mathscr{C}^0([0,1])$

On considère les formes linéaires définies par

$$V(f) = f(1) - f(0) \quad \text{et} \quad T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) \, dt$$

où φ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$. →**[60]**

1. Si E est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les formes linéaires V et T_φ sont continues :

$$\forall\, f \in E, \quad |V(f)| \leqslant 2\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad |T_\varphi(f)| \leqslant \left[\int_0^1 \varphi(t) \, dt\right] \|f\|_\infty.$$

2. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ de convergence en moyenne.
2.a La forme linéaire V n'est pas continue.
2.b La forme linéaire T_φ est continue :

$$\forall\, f \in E, \quad \big|T_\varphi(f)\big| \leqslant \|\varphi\|_\infty \, \|f\|_1.$$

3. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ de convergence en moyenne quadratique.
3.a La forme linéaire V n'est pas continue.
3.b La forme linéaire T_φ est continue.

Entraînement

46. Questions pour réfléchir
1. L'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est-il un espace vectoriel ?
2. Si f et g sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$, alors $\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$ sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$.
3. Soient E et F, deux espaces vectoriels isomorphes et φ, un isomorphisme de F sur E.
3.a Pour toute norme N sur E, l'application $\|\cdot\| = N \circ \varphi$ est une norme sur F.
3.b La bijection φ est lipschitzienne de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N) et sa réciproque est lipschitzienne de (E, N) dans $(F, \|\cdot\|)$.

47. Dérivation des polynômes
Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \quad \in \mathbb{R}[X],$$

on pose

$$N(P) = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

47.1 L'application N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
47.2 La dérivation $[P \mapsto P']$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et, pour tout $d \in \mathbb{N}$, induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_d[X]$.
Ces endomorphismes sont-ils continus pour la norme N ?

48. Endomorphismes de $E = \mathscr{C}^0([0,1])$
L'espace E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de convergence uniforme sur $[0,1]$.
48.1 L'application u définie par

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad u(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1)$$

est un endomorphisme continu de E.
48.2
1. Pour toute fonction $f \in E$, il existe une, et une seule, primitive F de f telle que

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2.

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 \left(\int_s^x f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

3. L'application v définie par $v(f) = F$ est un endomorphisme continu de E.

49. Suites périodiques complexes
Le sous-espace $E \subset \ell^\infty(\mathbb{C})$ des suites périodiques est muni de la norme uniforme.
1. L'application L définie par

$$L(u) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} u_k,$$

où p est une période de la suite $u \in E$, est une forme linéaire continue sur E.
2. L'application linéaire θ de $F = \operatorname{Ker} L$ dans E définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \theta(u)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

n'est pas continue.

50. Les espaces $E = \mathscr{C}^0([0,1])$ et $F = \mathscr{C}^1([0,1])$ sont respectivement munis des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$. →**[33.2]**
Pour toute fonction $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$, on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad U(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les applications linéaires T et U sont continues de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(F, \|\cdot\|_{\mathscr{C}^1})$. →**[45.5]**

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

51. Exemples et contre-exemples
1. Exemple de partie A telle que la distance $\mathrm{d}(0_E, A)$ ne soit pas atteinte :

$$\forall\, y \in A, \quad \mathrm{d}(0_E, y) > \mathrm{d}(0_E, A).$$

2. Exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
3. Exemple de suite admettant une infinité de valeurs d'adhérence.
4. Exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace $\mathscr{C}^1([0,1])$ qui converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$.
5. Exemples de normes d'algèbre sur $\mathrm{L}_c(E)$; sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

52. Méthodes
1. Comment calculer la distance de l'origine à un cercle ? (On se place dans le plan euclidien canonique.)
2. Comment démontrer qu'une suite est divergente ?
3. Comment démontrer qu'une application linéaire est lipschitzienne ?

Approfondissement

53. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!}.$$

Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(X^n) \geqslant 2^{n-1}$$

la forme linéaire f n'est continue sur $\mathbb{R}[X]$ ni pour la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$ **[33.1]** ni pour la norme de la convergence en moyenne sur $[0,1]$ **[33.3]**.

54. L'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad U(f)(x) = x \int_x^1 (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t + (1-x) \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

54.1 L'application U est un endomorphisme de E et, pour tout $f \in E$, l'application $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
54.2 On pose

$$\forall\, x \in [0,1], \quad V(f)(x) = [U(f)]'(x).$$

L'application V est un endomorphisme de E et

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|V(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \|f\|_\infty.$$

54.3

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|U(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{8} \|f\|_\infty$$

55. Comparaisons de normes

55.1 La norme définie sur l'espace E des suites réelles bornées par

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| = \sup_{x\in[0,1[} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n\right|$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ au sens où : →**[32.1]**

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\|u_n\|$ tende vers 0 alors que $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

55.2 La norme définie sur l'espace F des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, f \in F, \quad \|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}|\cos t|\,\mathrm{d}t}$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$: →**[33.1]**

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, f \in F, \quad \|f\| \leqslant K\|f\|_\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes car

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, f \in F, \quad \begin{cases} \|f\|_\infty = 1 \\ \|f\| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

56. Une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}.$$

La forme linéaire

$$T = \left[P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)\,\ell\mathrm{n}\, t}{1+t}\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue.

Pour aller plus loin

57. Questions pour réfléchir

1. Une norme N sur E est dite **euclidienne** lorsqu'il existe un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad N(x) = \sqrt{(x\,|\,x)}.$$

1.a Comment savoir si une norme N est euclidienne ?
1.b Exemple de norme qui n'est pas euclidienne.
2. Soient N_1 et N_2, deux normes sur E. Si une partie A de E est bornée pour N_1, est-elle nécessairement bornée pour N_2 ?
3. Si (E, N) est une algèbre normée, alors la multiplication interne $[(x,y) \mapsto xy]$ est continue de $E \times E$ dans E.
4. *Suite de* **[40.5]** – Et si $\mathbb{R}^3$ est muni d'une autre norme ?
5. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{L}_c(E) = \mathrm{L}(E)$ quelle que soit la norme considérée sur E.

58. Constante de Lipschitz optimale

Soit $f : \Omega \to F$, une fonction lipschitzienne.

58.1 Il existe $k_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\{k \in \mathbb{R}_+ \ :\ f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\} = [k_0, +\infty[.$$

58.2 ✍ *Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, la **constante de Lipschitz optimale** de f est*

$$\min\{k \in \mathbb{R}_+ \ :\ f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\}.$$

58.3 Une fonction lipschitzienne est constante si, et seulement si, sa constante de Lipschitz optimale est nulle.

58.4 La constante de Lipschitz optimale des exemples **[40.2]**, **[40.3]** et **[40.4]** est égale à 1.

58.5 On peut voir la constante de Lipschitz optimale comme une borne supérieure.

Soit $\Omega \subset E$. Pour tout $(x,y) \in \Delta = \Omega \times \Omega \setminus \{(x,x),\ x \in \Omega\}$, on pose

$$T(x,y) = \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x-y\|_E}.$$

1. Une fonction $f : \Omega \to F$ est lipschitzienne si, et seulement si, la fonction T est bornée sur Δ. Dans ce cas, la constante de Lipschitz optimale de f est la borne supérieure de T sur Δ.
2. La fonction T atteint-elle un maximum ? →**[40.6]**
3. L'application qui, à toute application $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, associe la constante de Lipschitz optimale de f est-elle une norme sur $\mathcal{L}(\Omega, F)$?

59. Inégalité de Minkowski

Sur $\mathbb{K}^d$, on peut définir une famille de normes sur le modèle des trois normes fondamentales. De même, sur le modèle des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on peut définir une famille de normes de convergence en moyenne sur des sous-espaces de $\mathscr{C}^0(I)$.

59.1 Normes sur $\mathbb{K}^d$

Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

1. L'**inégalité de Hölder** [**1.37**] s'énonce sous la forme

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

où p et q sont deux réels conjugués : $1/p + 1/q = 1$.
1.a Que devient l'inégalité de Hölder pour $p = 2$?
1.b Analogue de l'inégalité de Hölder pour la norme $\|\cdot\|_1$?
2. L'**inégalité de Minkowski** est une version de l'inégalité triangulaire.
2.a Quels que soient x et y dans $\mathbb{K}^d$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$$

2.b

$$\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \leqslant \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\|x+y\|_p^{p/q}$$

2.c L'application $[x \mapsto \|x\|_p]$ est une norme sur $\mathbb{K}^d$.
3. Soit $x \in \mathbb{K}^d$.
3.a Il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant d$ tel que $|x_i|$ soit maximal. Cet indice est-il unique ?
3.b

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p.$$

59.2 Normes naturelles sur des espaces de suites

4. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_k^p$ soit absolument convergente est un espace vectoriel qui contient $\ell^1(\mathbb{K})$. On pose

$$\forall\, u \in \ell^p(\mathbb{K}), \quad \|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

5. Si $u \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $v \in \ell^q(\mathbb{K})$, alors la série $\sum u_k v_k$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

L'application $[u \mapsto \|u\|_p]$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$.

6. Pour toute suite sommable $u \in \ell^1(\mathbb{K})$,

$$\|u\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|u\|_p.$$

59.3 **Normes sur $\mathscr{C}^0(I)$**
Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $p > 1$, on note $\mathscr{L}_c^p(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^p soit intégrables sur I et on pose

$$\forall\, f \in \mathscr{L}_c^p(I), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On considère deux réels conjugués p et q.

7. **Inégalité de Hölder.**
Si $f \in \mathscr{L}_c^p(I)$ et $g \in \mathscr{L}_c^q(I)$, alors le produit fg est continu et intégrable sur I et

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

8. **Inégalité de Minkowski.**
Si f et g appartiennent à $\mathscr{L}_c^p(I)$, alors $f+g \in \mathscr{L}_c^p(I)$ et

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

9. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\mathscr{L}_c^p(I)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathscr{L}_c^p(I)$.

10. On suppose que I est un intervalle borné.

10.a
$$\forall\, p > 1, \quad \mathscr{L}_c^\infty(I) \subset \mathscr{L}_c^p(I)$$

10.b Soient $f \in \mathscr{L}_c^\infty(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle ouvert non vide $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset I$ tel que

$$\forall\, x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

10.c
$$\forall\, f \in \mathscr{L}_c^\infty(I), \quad \|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$$

60. *Suite de* **[45.5]** – Étudier le cas où la fonction φ est continue par morceaux et de signe quelconque sur $[0,1]$.

Notion de norme subordonnée

61. On suppose que l'espace vectoriel E est muni d'une norme $\|\cdot\|$. La **norme subordonnée*** à $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ des endomorphismes de E.

61.1 ✍ *Soit $f \in \mathrm{L}_c(E)$.* →**[43]**
*La **norme d'application linéaire*** de f, dite **norme subordonnée*** à la norme $\|\cdot\|$ sur E, est définie par*

$$|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

61.2 Soit $f \in \mathrm{L}_c(E)$.

1.
$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\, \|x\|_E.$$

2.
$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad |\lambda| \leqslant |||f|||.$$

3. Si K est une constante réelle telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\, \|x\|_E$$

alors $|||f||| \leqslant K$.

61.3 * *L'application $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre sur* $\mathrm{L}_c(E)$. **[35]**

61.4 Si $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, alors $|||f|||$ est la constante de Lipschitz optimale **[58]** de f.

62. *Suite de* **[61.1]** – Soit $f \in \mathrm{L}_c(E)$.

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F.$$

63. *Suite de* **[61.3]** – Soient u et v dans $\mathrm{L}_c(E)$. Si

$$|||u \circ v||| = |||u|||^2 \quad \text{et} \quad |||v \circ u||| = |||v|||^2,$$

alors $|||v||| = |||u|||$.

64. **Norme d'un projecteur**
Soit $p \in \mathrm{L}(E)$, un projecteur non identiquement nul.

64.1 Si le projecteur p est lipschitzien, alors $|||p||| \geqslant 1$.

64.2 Si E est un espace euclidien, alors :

1. Si p est un projecteur orthogonal, alors il est lipschitzien et $|||p||| = 1$.
2. Si le projecteur p est lipschitzien sans être un projecteur orthogonal, alors $|||p||| > 1$.

65. On *admet* que, pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $K > 0$ (qui dépend de N et de A) telle que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant K\, N(X).$$

65.1 ✍ *Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La **norme subordonnée*** à N de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par*

$$|||A||| = \sup_{N(X)=1} N(AX).$$

65.2 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant |||A|||\, N(X).$$

65.3 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|||A||| = \sup_{N(X) \leqslant 1} N(AX) = \sup_{X \neq 0} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

65.4 * *Pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la norme subordonnée à N est une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

66. L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

1.
$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

2.
$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leqslant |||A|||.$$

67. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, telle que $|||f||| = \max_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. Alors

$$|||f||| = \max_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

mais l'expression $\|f(x)\|_F$ n'atteint pas nécessairement un maximum sur la boule unité ouverte $[\|x\|_E < 1]$.

68. Soient E et F, deux espaces vectoriels normés. L'espace $\mathrm{L}_c(E,F)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée aux normes sur E et F. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues converge vers $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$:

$$\lim_{n\to+\infty} |||f - f_n||| = 0$$

et si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs converge vers $x \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\|_E = 0$$

alors la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F$.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x) - f_n(x_n)\|_F = 0$$