Séries numériques

Échauffement

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

1.2

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1}.$$

1.3

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n}.$$

1.4

$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k.$$

2. Sommation télescopique
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe.

$$\forall\, p \geqslant n, \quad \sum_{k=n}^{p} (x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n.$$

3. Série géométrique
3.1

$$\forall\, m \leqslant n, \quad \sum_{k=m}^{n} 1^k = n - m + 1.$$

3.2 Si q est un complexe différent de 1, alors

$$\forall\, m \leqslant n, \quad \sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}.$$

4. Séries et dérivation discrète
L'application Δ définie par

$$\Delta(u)_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \Delta(u)_n = u_n - u_{n-1}$$

est un endomorphisme de l'espace $\ell^0(\mathbb{C})$ des suites complexes.
L'application σ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(u)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est un endomorphisme de $\ell^0(\mathbb{C})$.

I

Convergence d'une série

5. Les **séries** sont des suites d'un genre particulier : l'idée fondamentale est que *les séries sont aux suites ce que les primitives sont aux fonctions.*
5.1 ✍ *La **série de terme général** u_n est une suite notée $\sum u_n$.*
5.2 ✍ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

*est la n-ième **somme partielle** de la série $\sum u_n$.*
5.3 Étudier la série $\sum u_n$, c'est étudier les propriétés de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles qui se déduisent du terme général u_n.

I.1 Nature d'une série

6. Étudier la **nature d'une série**, c'est chercher si elle est convergente ou divergente et, si une série est convergente, c'est préciser si elle est absolument convergente ou semi-convergente.
6.1 ✍ *Une série $\sum u_n$ est **convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente. La série est **divergente** dans le cas contraire.*
6.2 ✍ *La **somme** d'une série convergente est la limite de la suite de ses sommes partielles. Elle est notée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

7. ➙ **Convergence des séries télescopiques**
La série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas,

$$\forall\, n_0, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) = \Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big) - x_{n_0}.$$

8. Divergence grossière
8.1 ➙ *Le terme général d'une série convergente tend vers 0.*
8.2 ✍ *Une série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** lorsque son terme général ne tend pas vers 0.*
8.3 ➙ *Toute série grossièrement divergente est divergente.*
8.4 Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0. →[**14**]

9. Restes d'une série convergente
Il faut considérer la n-ième somme partielle d'une série convergente comme une valeur approchée de sa somme. Le **reste d'ordre** n est alors l'erreur absolue commise en assimilant la somme à la n-ième somme partielle.
9.1 ✍ *Soit $\sum u_n$, une série convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le **reste d'ordre** N est le nombre R_N défini par la relation suivante.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + R_N$$

9.2 ✍ *Par analogie avec la relation de Chasles, le reste d'ordre N est aussi noté*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

*Le terme u_{N+1}, premier terme du reste d'ordre N, est appelé **premier terme négligé**.*
9.3 ➙ *La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente est une suite de limite nulle.*

10. Linéarité de la somme
10.1 ✍ *La **somme** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $(u_n + v_n)$.*
10.2 ✍ *La **combinaison linéaire** $\lambda \sum u_n + \sum v_n$ est la série de terme général $(\lambda u_n + v_n)$.*
10.3 ➙ *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors toute combinaison linéaire $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est une série convergente.*
10.4 ➙ *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.*
10.5 ➙ *L'application qui, à une série convergente, associe sa somme est une forme linéaire.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

10.6 ➙ *On suppose que la série complexe $\sum u_n$ est convergente, de somme S. Alors les séries $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(u_n)$ sont convergentes et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) = \mathfrak{Re}(S) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n) = \mathfrak{Im}(S).$$

I.2 Méthodes de référence

11. Séries alternées

Le **critère spécial des séries alternées** explicite une condition très simple pour qu'une série alternée converge. En outre, cette condition donne une estimation assez précise du reste de la série.

11.1 ✍ *La série réelle $\sum u_n$ est une **série alternée** lorsque les nombres $(-1)^n u_n$ sont tous de même signe.*

11.2 La série $\sum u_n$ est une série alternée si, et seulement si,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (-1)^n a_n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de signe constant.

11.3 Si la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente [**1.2**], [**1.3**] et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \leqslant a_n.$$

11.4 ➙ **Critère spécial des séries alternées**
Une série alternée $\sum u_n$ telle que $|u_n|$ tende vers 0 en décroissant est convergente.
De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + \cdots$$

est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé :

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

et de même signe que le premier terme négligé : $R_n u_{n+1} \geqslant 0$.

12. Séries de terme général positif

12.1 La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles d'une série $\sum u_n$ de terme général positif est croissante.

12.2 ➙ *Une série de terme général positif $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée. Dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

12.3 ▷ *Si $\sum u_n$ est une série convergente de terme général positif, sa somme est un majorant de toutes ses sommes partielles.*

12.4 ➙ *Si une série de terme général positif diverge, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.*

12.5 ▷ *Une série de terme général négatif $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est minorée.*

12.6 ▷ *Une série dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang est convergente si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est bornée.*

12.7 ➙ **Comparaison des séries de termes généraux positifs**
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries de termes généraux positifs. Si

$$u_n = \mathcal{O}(v_n)$$

et si la série de référence $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

13. Séries géométriques

13.1 ✍ *Une **série géométrique de raison** $q \in \mathbb{C}$ est une série dont le terme général est de la forme aq^n avec $a \neq 0$.*

13.2 ➙ *La série géométrique $\sum q^n$ (avec $q \in \mathbb{C}$) est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$ et dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

13.3 ▷ *Une série géométrique qui n'est pas convergente diverge grossièrement.*

14. Séries de Riemann

14.1 ✍ *La **série de Riemann d'exposant** $\alpha \in \mathbb{R}$ est la série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

*La **série harmonique** est la série de Riemann d'exposant $\alpha = 1$. Les sommes partielles de la série harmonique sont notées H_n.*

14.2 ➙ *La série de Riemann d'exposant α est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.* →[**27.1**], [**28.1**], [**28.2**]

Entraînement

15. Questions pour réfléchir

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ sont de même nature.
2. Nature de la série $\sum n^{(-1)^n}$.
3. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge grossièrement, alors $\sum v_n$ diverge grossièrement.
4. Pourquoi les restes d'une série divergente ne sont-ils pas définis ?
5. Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors les séries $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$ sont de même nature.

6.a Que dire de la somme de deux séries divergentes ?
6.b Que dire de $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ lorsque $\sum u_n$ est divergente ?

7. Discuter la nature de la série $\sum(u_n + v_n + w_n)$ en fonction de la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.
8. Soit $\sum u_n$, une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère [**11.4**]. Comment encadrer la somme S de cette série à l'aide des sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1} ?
9. Les sommes partielles d'une série convergente de terme général positif sont des valeurs approchées par défaut de la somme.
10. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de termes généraux positifs, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge si, et seulement si, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

16. Existence et signe des sommes suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

17. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = o\Big(\frac{1}{n!}\Big).$$

18. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2(-1)^n}.$$

Le critère spécial des séries alternées [**11.4**] peut-il s'appliquer à cette série ? →[**57.3**]

19. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge. →[**78.3**]

20. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries convergentes dont les termes généraux u_n et v_n sont strictement positifs. Les séries

$$\sum(u_n + v_n) \qquad \sum \max(u_n, v_n) \qquad \sum \sqrt{u_n v_n} \qquad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

sont convergentes.

21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \sqrt{u_n u_{n+1}}.$$

Les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

22. Calculs explicites

22.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cos n\pi = 2/3$$

22.2

$$\forall\, x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

22.3 Soit $x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

2. Pour $x = 0$, on retrouve la valeur de ces sommes partielles par passage à la limite.

3. Si la série de terme général $u_n = \sin nx$ est convergente, alors u_n tend vers 0 et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos x + \cos nx \sin x,$$

alors $\sin x = 0$.

4. Pour tout $x \neq 0 \pmod{\pi}$, les séries $\sum \sin nx$ et $\sum \cos nx$ sont grossièrement divergentes quoique leurs sommes partielles restent bornées.

23. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = x^n/n$.

1. La série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $-1 \leqslant x < 1$.
2. Il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-1, 0], \quad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\Big| \leqslant \alpha_n.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ est défini sur $[0,1[$ mais n'est pas borné sur cet intervalle.

24. Calculs de sommes

Il faut parfois calculer une décomposition en éléments simples pour faire apparaître une somme télescopique.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = 4 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ell\mathrm{n}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = -\ell\mathrm{n}\, 2 \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) = 0$$

II

Comparaison de sommes et d'intégrales

25. L'intégrale d'une fonction sur un intervalle étant une sorte de somme, il est souvent fructueux de comparer une intégrale à une somme.

Cela n'est possible *facilement* que dans le cas des fonctions monotones.

II.1 Principe

26. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue et croissante.

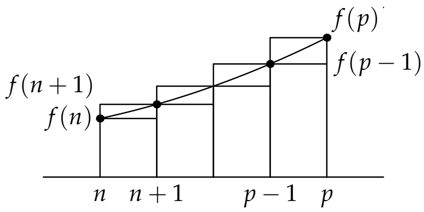
26.1 Si $[a, a+1] \subset I$, alors

$$f(a) \leqslant \int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(a+1).$$

26.2 Encadrement de la somme

Étant donnés deux entiers $n \leqslant p$ tels que $[n,p] \subset I$,

$$f(n) + \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{p} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x + f(p).$$



26.3 Encadrement de l'intégrale

Étant donnés deux entiers $n \leqslant p$ tels que $[n,p] \subset I$,

$$\sum_{k=n}^{p-1} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k).$$

II.2 Applications

27. Séries convergentes

27.1 Pour $\alpha > 1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

27.2 Pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

27.3 Lorsque α tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^\alpha}\Big).$$

28. Séries divergentes

28.1 Équivalent des nombres harmoniques [14]

$$H_n \sim \ell\mathrm{n}\, n$$

28.2 Lorsque n tend vers $+\infty$, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

28.3

$$\ell\mathrm{n}\, n! \sim n\, \ell\mathrm{n}\, n$$

28.4 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \sim \frac{p}{n}$$

alors que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \sim \ell\mathrm{n}\, 2.$$

28.5

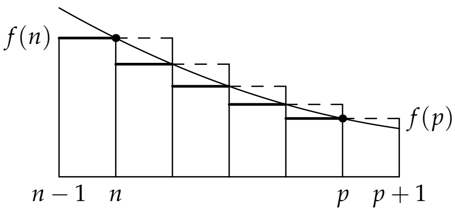
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3} n\sqrt{n} + \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

Entraînement

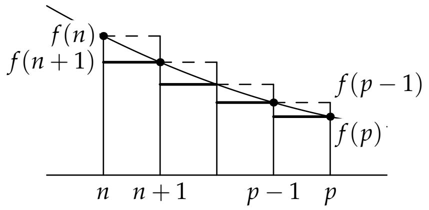
29. Questions pour réfléchir

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue et décroissante.

1.a Encadrer la somme $\sum_{k=n}^{p} f(k)$ par deux intégrales.



1.b Encadrer l'intégrale $\int_n^p f(t)\,\mathrm{d}t$ par deux sommes.



2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et positive telle que la série $\sum u_n$ converge, alors nu_n tend vers 0.

3. Soit f, une fonction continue et décroissante telle que la série $\sum f(n)$ converge. Pourquoi la comparaison de cette série avec une intégrale donne-t-elle une estimation médiocre de la somme de cette série ?

30. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum a^{H_n}$ converge pour $a < 1$ et diverge grossièrement pour $a \geqslant 1$. **[28.1]**

31.

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}^2\,k} \sim \frac{1}{\ell\mathrm{n}\,n}$$

32.

$$\sum_{k=2}^{n} \ell\mathrm{n}^2\,k \sim n\,\ell\mathrm{n}^2\,n$$

33.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}\,k} = \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) + \mathcal{O}(1)$$

34.

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\ell\mathrm{n}\,k}{k} = \ell\mathrm{n}\,2.\,\ell\mathrm{n}\,n + \frac{\ell\mathrm{n}^2\,2}{2} + o(1)$$

35. La somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

est définie pour tout $x > 0$. De plus,

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}$$

donc S tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et $S(x) \sim 2/x^2$ au voisinage de $x = 0$.

III

Convergence absolue

III.1 Séries absolument convergentes

36.1 ✍ *Une série $\sum u_n$ est* ***absolument convergente*** *lorsque la série de terme général positif $\sum |u_n|$ est convergente.*

36.2 ➙ *Soit $\sum u_n$, une série dont le terme général u_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Alors $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ est absolument convergente.*

36.3 ➙ *Une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est absolument convergente.*

Convergence des séries absolument convergentes

37. Cas des séries réelles

37.1 ✍ *On note x^+, la* ***partie positive*** *de $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le réel égal à $|x|$ lorsque x est positif et à 0 lorsque x est négatif.*

37.2 ✍ *On note x^-, la* ***partie négative*** *de $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire le réel égal à $|x|$ lorsque x est négatif et à 0 lorsque x est positif.*

37.3 ➙ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$x = x^+ - x^- \quad \text{et} \quad |x| = x^+ + x^-.$$

37.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.

38. Cas des séries complexes

Une série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(u_n)$ sont absolument convergentes.

39.1 ➙ *Pour une série numérique, la convergence absolue implique la convergence.*

39.2 ➙ *Une série de terme général positif est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.*

39.3 ▷ *On suppose que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Si la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, alors elle est divergente.*

40.1 ✍ *Une série $\sum u_n$ est* ***semi-convergente*** *lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.*

40.2 ➙ *La somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente est semi-convergente.*

III.2 Théorèmes de comparaison

41. Les différents théorèmes de comparaison, qui relient tous l'ordre de grandeur du terme général u_n à celui du terme général d'une série connue $\sum v_n$, servent à vérifier si la série $\sum u_n$ est *absolument* convergente.

41.1 *Ces résultats ne permettent pas de démontrer la convergence d'une série semi-convergente.*

41.2 Il suffit à chaque fois d'étudier *l'ordre de grandeur du terme général* pour conclure.

42. La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ est en fait une comparaison entre les quantités positives $|u_n|$ et $|v_n|$:

$$u_n = \mathcal{O}(v_n) \iff |u_n| = \mathcal{O}(|v_n|).$$

43. Condition suffisante de convergence absolue

43.1 ➙ *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*

43.2 ▷ *Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.*

43.3 ▷ *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.*

43.4 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente.

44. Condition nécessaire de convergence absolue

44.1 ➙ *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, alors $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.*

44.2 ▷ *Soit $\sum v_n$, une série dont le terme général est de signe constant. S'il existe une série divergente $\sum u_n$ telle que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors la série $\sum v_n$ est divergente.*

45. Critère de convergence absolue

45.1 ➙ *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\sum v_n$ est absolument convergente.*

45.2 ➙ *On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum v_n$ converge.*

45.3 ▷ *On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Alors la série $\sum u_n$ diverge si, et seulement si, la série $\sum v_n$ diverge.*

46. Comparaison logarithmique et règle de D'Alembert
La règle de D'Alembert donne une condition simple pour comparer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une suite géométrique. On la formule comme une condition suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente ou pour que cette série soit grossièrement divergente.

46.1 Si u_n et v_n ne s'annulent pas et si

$$\Big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big| \leqslant \Big|\frac{v_{n+1}}{v_n}\Big|$$

à partir d'un certain rang, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

46.2 S'il existe $0 \leqslant q < 1$ tel que

$$\Big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big| \leqslant q$$

à partir d'un certain rang, alors $u_n = \mathcal{O}(q^n)$ et $\sum u_n$ est absolument convergente.

46.3 S'il existe $q > 1$ tel que

$$q \leqslant \Big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big|$$

à partir d'un certain rang, alors $q^n = \mathcal{O}(u_n)$ et $\sum u_n$ diverge grossièrement.

46.4 ➞ **Condition suffisante de convergence absolue**
Si

$$\lim_{n\to+\infty} \Big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big| = \ell$$

et si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

46.5 ➞ **Séries de Poisson**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série

$$\sum z^n/n!$$

est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

46.6 ➞ **Condition suffisante de divergence grossière**
Si

$$\lim_{n\to+\infty} \Big|\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big| = \ell$$

et si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

46.7 Pour tout entier *n pair*, on pose $u_n = 2^{-n}$ et pour tout entier *n impair*, on pose $u_n = 3^{-n}$.
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, mais la règle de D'Alembert ne permet pas de le démontrer.

46.8 Si $\sum u_n$ est une série de Riemann, convergente ou divergente, alors le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1 : la règle de D'Alembert ne s'applique à aucune série de Riemann.

47. Règle de Riemann
On compare cette fois le terme général d'une série à celui d'une série de Riemann.
Ni cette règle, ni la règle de D'Alembert ne s'appliquent aux séries semi-convergentes.

47.1 ➞ *S'il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big),$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

47.2 ➞ *S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que*

$$\frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}(u_n),$$

alors $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

47.3 ➞ *S'il existe $\ell \neq 0$ et $\alpha > 1$ tels que*

$$u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha},$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

47.4 ➞ *S'il existe $\ell \neq 0$ et $\alpha \leqslant 1$ tels que*

$$u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha},$$

alors $\sum u_n$ diverge.

III.3 Applications

48. Constante d'Euler [14.1]

48.1 La série

$$\sum\Big[\frac{1}{n} - \ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big]$$

est absolument convergente.

48.2 Il existe une constante γ, dite **constante d'Euler**, telle que

$$H_n = \ell\mathrm{n}\, n + \gamma + o(1).$$

→[77]

49. Formule de Stirling
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$w_n = \ell\mathrm{n}\,\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}.$$

49.1 La série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est absolument convergente.

49.2 ➞ *Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

La constante K est égale à $\sqrt{2\pi}$. →[97]

49.3 Pour toute suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$,

$$u_n! \sim \sqrt{2\pi} u_n^{u_n} e^{-u_n}\sqrt{u_n}.$$

49.4

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

50. Contractions d'un segment

50.1 ✍ *Une application est **contractante** lorsqu'elle est lipschitzienne et admet une constante de Lipschitz $k < 1$.*

50.2 Soient I, un intervalle de $\mathbb{R}$; $f : I \to I$, une application contractante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par $u_0 \in I$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

50.3 Si $f : [a,b] \to [a,b]$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe, qui est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelle que soit la valeur initiale u_0 choisie.

51. Transformation d'Abel
Étant données deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

51.1 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = U_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} U_n(V_n - V_{n+1}).$$

51.2 Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n V_n$ est somme d'une suite de limite nulle et d'une série absolument convergente.

51.3 Si la série $\sum z_n$ est convergente, alors la série $\sum z_n/n$ est convergente.

51.4 Pour tout $0 < x < 2\pi$, la série $\sum \cos nx/n$ est convergente.

Entraînement

52. Questions pour réfléchir

1.a La série $\sum a_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum(-1)^n a_n$ est absolument convergente.

1.b Une série de Riemann est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

1.c Une série géométrique est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

1.d Une série géométrique est divergente si, et seulement si, elle est grossièrement divergente.

2. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ converge absolument.

3. Une combinaison linéaire de séries semi-convergentes est-elle une série semi-convergente ?

4. Soit $\sum u_n$, une série réelle.

4.a Si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.

4.b Si $\sum u_n$ est semi-convergente, que dire du signe de u_n ?

5. On suppose que $u_n = o(1/n^\alpha)$.

5.a Pour quelles valeurs de α peut-on en déduire que la série $\sum u_n$ converge ?

5.b Peut-on déduire de cette hypothèse que la série $\sum u_n$ est divergente ?

6. On suppose que $n^{-\alpha} = o(u_n)$.

6.a Peut-on déduire de cette hypothèse que la série $\sum u_n$ est convergente ?

6.b Pour quelles valeurs de α peut-on en déduire que la série $\sum u_n$ diverge ?

7. Justifier, avec un minimum de calculs, la convergence des séries étudiées au **[24]**.

53. Soit $\sum a_n$, une série absolument convergente.

53.1 La série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $|x| \leqslant 1$.

53.2 La série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

54. Application du critère de Riemann

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et, si } \alpha > 1, \quad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. *Suite de* **[27.2]** – Nature des séries $\sum R_n(\alpha)$ et $\sum R_n(\alpha)/S_n(\alpha)$.

2. *Suite de* **[28.2]** – Nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + S_n(1/2)}.$$

3. *Suite de* **[28.5]** – On pose $u_n = n^\alpha S_n(-1/2)$. Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

55. Comparaison à une série géométrique

Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$\sum \frac{\lambda^n}{1+\lambda^{2n}} \qquad \sum \frac{\lambda^{2n}}{1+\lambda^{2n}} \qquad \sum \frac{1}{1+\lambda^{2n}}$$

56. La série de terme général

$$u_n = \ell n\big[2n + (-1)^n\big] - \ell n\, 2n$$

est convergente sans être absolument convergente.

57. Développements asymptotiques

Un développement asymptotique du terme général permet parfois de décomposer une série en somme de séries dont la nature est connue.

57.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ell n\, n + a\,\ell n(n+1) + b\,\ell n(n+2).$$

La série $\sum(-1)^n u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $a = -2$ et $b = 1$. Dans ce cas, sa somme est égale à $-\ell n\, 2$.

57.2 Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

est-elle convergente ? Quelle est sa somme ?

57.3 *Suite de* **[18]** – Nature de la série $\sum u_n$?

57.4 Nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

en fonction du réel α.

58. Calculs de sommes [48]

58.1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ell n\, 2$$

58.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\,\ell n\, 2 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\,\ell n\, 2$$

58.3 Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

58.4 Calculer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme suivante.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$$

59. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ell n\, k}{k}.$$

59.1 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\ell n^2\, n}{2}.$$

Comme la série de terme général

$$u_n = \frac{\ell n\, n}{n} - \frac{\ell n^2\, n - \ell n^2(n-1)}{2}$$

est absolument convergente, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$S_n = \frac{\ell n^2\, n}{2} + c + o(1).$$

59.2 Il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} = n + \frac{\ell n^2\, n}{2} + K + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

60. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ell n^2\, k.$$

La série $\sum 1/u_n$ est convergente. **[31]**, **[32]**

61. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (2 - \sqrt{3})^n \qquad \text{et} \qquad v_n = (2 + \sqrt{3})^n.$$

Comme $u_n + v_n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux séries $\sum \sin \pi u_n$ et $\sum \sin \pi v_n$ sont absolument convergentes.

62. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

On peut démontrer que la série $\sum u_n$ diverge de deux manières.

62.1 À partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

donc il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\exists\, n_0 \geqslant 1,\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant K v_n.$$

62.2 Comme la série

$$\sum\Big(\frac{2}{3}\,\ell\text{n}\,\frac{n+1}{n} + \ell\text{n}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big)$$

est absolument convergente, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \sim \frac{A}{n^{2/3}}.$$

63. Nature des séries suivantes.

$$\sum\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n} \qquad \sum\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\sum\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2} \qquad \sum\sin\Big(n\pi + \frac{\pi}{n}\Big)$$

$$\sum\frac{1}{n\cos^n\theta} \qquad \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum\ell\text{n}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\Big) \qquad \sum\cos\big(\pi\sqrt{n^2+n+1}\big)$$

$$\sum\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} \qquad \sum\frac{(-1)^n}{\ell\text{n}\big(n+(-1)^n\big)}$$

$$\sum\frac{(-1)^n}{\ell\text{n}\, n + (-1)^n} \qquad \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

64. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ diverge. On note S_n, la n-ième somme partielle de cette série.

1. Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{u_n}{S_n} \leqslant \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

et si u_n/S_n tend vers 0, alors

$$\frac{u_n}{S_n} \sim \ell\text{n}\,\frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

2. Pour $\alpha > 1$,

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

3. Nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ en fonction du réel α.

65. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t.$$

65.1 Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

mais on peut déduire la nature de la série $\sum u_n$ de la relation $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

65.2 La suite de terme général $(n+1)u_n$ tend vers $e/_{1+e}$.

65.3 La série $\sum(-1)^n u_n$ est semi-convergente.

65.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum u_n x^n$ converge si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$.

66. Théorème de Morgan

On considère une série de terme général $u_n = 1/\varphi(n)$ et on étudie le quotient

$$r_n = \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)}.$$

66.1 Que dire de r_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans le cas des séries de Riemann : $u_n = 1/n^q$? dans le cas des séries de Bertrand : $u_n = 1/n^q\,\ell\text{n}\, n$?

66.2 * *Soit φ, une fonction croissante et strictement positive de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. On suppose que le quotient r_n tend vers une limite ℓ, finie ou infinie, lorsque n tend vers $+\infty$.*

Alors, par comparaison avec les séries de Riemann,

- *pour $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*
- *pour $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

66.3 On pose $\varphi(t) = t\,\ell\text{n}^2\, t$: la règle de Morgan peut-elle s'appliquer ? Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

66.4 Utiliser la règle de Morgan pour démontrer la convergence de la série

$$\sum\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,\ell\text{n}\,\frac{n+1}{n}\Big).$$

IV

Sommation des relations de comparaison

67. On considère ici une série $\sum u_n$ dont le terme général est comparable (avec $\mathcal{O}$, o ou $\sim$) au terme général d'une suite *positive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de telle sorte qu'on puisse en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

En pratique, $\sum a_n$ est une série géométrique ou une série de Riemann.

68. $u_n \sim a_n$ si, et seulement si, $u_n = a_n + o(a_n)$.

IV.1 Séries convergentes

69. Dans le cas où les deux séries $\sum u_n$ et $\sum a_n$ sont convergentes, on compare les ordres de grandeur de leurs restes, qui sont des infiniment petits.

70. Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k|\Big).$$

71. ➙ *Soit $\sum a_n$, une série convergente de terme général* positif.

71.1 *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et*

$$\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k| = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

71.2 *Si $u_n = o(a_n)$, alors*

$$\sum_{k=n}^{+\infty}|u_k| = o\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

71.3 *Si $u_n \sim a_n$, alors*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

IV.2 Séries divergentes

72. Dans le cas de séries divergentes dont les termes généraux sont de signe constant, on compare les ordres de grandeur des sommes partielles, qui sont des infiniment grands.

73. On considère deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$.
73.1 S'il existe deux réels A et B tels que
$$0 \leqslant x_n \leqslant Ay_n + B$$
à partir d'un certain rang, alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.
73.2 On suppose que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et un réel $A_\varepsilon > 0$ tels que
$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} y_n + A_\varepsilon.$$
Alors $x_n = o(y_n)$.
74. ➙ *Soit $\sum a_n$, une série divergente de terme général* positif. *On note S_n (resp. A_n), les sommes partielles de la série $\sum u_n$ (resp. de la série $\sum a_n$).*
74.1 *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(A_n)$.*
74.2 *Si $u_n = o(a_n)$, alors $S_n = o(A_n)$.*
74.3 *Si $u_n \sim a_n$, alors $S_n \sim A_n$.*

IV.3 Applications

75. Calcul approchée de la somme d'une série convergente
Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors on peut considérer que la somme partielle d'ordre n est une valeur approchée de la somme de la série, l'erreur commise étant le reste d'ordre n :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + R_n.$$
75.1 Si $u_n = \mathcal{O}(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(1/n^{\alpha-1})$.
75.2 Si $u_n = \mathcal{O}(q^n)$ avec $0 < q < 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(q^n)$.
76. Théorème de Cesaro
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$
77. Constante d'Euler [48]
77.1
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k} - \ell\text{n}\,\frac{k+1}{k}\Big) \sim \frac{1}{2n}$$
77.2
$$H_n = \ell\text{n}\, n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
78. Suites récurrentes et équivalents
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, qui vérifie une relation de la forme
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
où f est une fonction dérivable sur un voisinage de 0. Par conséquent,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = f'(0)$$
et la valeur de $f'(0)$ permet de préciser l'ordre de grandeur de l'infiniment petit u_n.
78.1 Convergence géométrique
Si $|f'(0)| < 1$, alors il existe $0 < q < 1$ tel que
$$u_n = o(q^n).$$
78.2 Convergence rapide
On suppose que $f'(0) = 0$.
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 plus vite que toute suite géométrique.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, alors il existe une constante $K > 0$ telle que
$$|f(x)| \leqslant K\,x^2$$
au voisinage de 0 et $u_n = \mathcal{O}(q^{2^n})$ pour un certain réel $0 < q < 1$.

78.3 Convergence lente
Si $f'(0) = 1$, alors
$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n + o(u_n).$$
Avec un développement limité plus précis de f, on peut trouver un réel α tel que la suite de terme général
$$v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$$
converge vers une limite *finie non nulle* ℓ.
1. Le réel α, s'il existe, est nécessairement négatif.
2. Si v_n tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $u_n \sim \sqrt[\alpha]{n\ell}$.
3. Si $f(x) = \ell\text{n}(1+x)$, alors $\alpha = -1$ et $u_n \sim 2/n$.
4. Si $f(x) = \sin x$, alors $\alpha = -2$ et $u_n \sim \sqrt{3/n}$.
5. *Suite de* **[19]** – Le terme général est équivalent à $\sqrt{1/2n}$.

Entraînement

79. Questions pour réfléchir
1. *Suite de* **[71]** – Pourquoi ne compare-t-on pas les sommes partielles des deux séries ?
2. *Suite de* **[74]** – Étudier le cas où la série $\sum u_n$ est convergente.
3. On suppose qu'il existe deux réels A et B tels que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant Ay_n + B.$$
Peut-on en déduire que $x_n = \mathcal{O}(y_n)$?
80. Comparer l'ordre de grandeur du reste d'ordre n des séries
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$$
qu'on peut déduire du critère spécial des séries alternées **[11.4]** avec celui qu'on peut déduire du théorème **[71]**.
81. Si $a_n = (-1)^n$ et $u_n = 1/n$, alors $u_n = o(a_n)$ et la série $\sum a_n$ est divergente. Cependant,
$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ell\text{n}\, n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \mathcal{O}(1).$$
Expliquer.
82. Soit $\sum a_n$, une série divergente de terme général positif. On note respectivement A_n, S_n et Σ_n, les sommes partielles des séries $\sum a_n$, $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$.
1. On suppose que $S_n = o(A_n)$. Peut-on en déduire que $u_n = o(a_n)$? que $\Sigma_n = o(A_n)$?
2. On suppose que $\Sigma_n = o(A_n)$. Peut-on en déduire que $S_n = o(A_n)$? que $u_n = o(a_n)$?

83. Il existe un réel C tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$
84. *Suite de* **[48]** – Il existe un réel C tel que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}} = \ell\text{n}\, n + C + o(1).$$
85. *Suite de* **[48]** – Il existe un réel λ tel que
$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big) \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}.$$
86. *Suite de* **[18]** – Donner un ordre de grandeur du reste.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

87. Exemples et contre-exemples

1. Exemples simples de séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. Exemples de séries semi-convergentes.
3. Exemples de séries divergentes qui ne sont pas grossièrement divergentes.
4. Exemple de série grossièrement divergente telle que la suite des sommes partielles soit bornée.
5. Exemples de séries alternées divergentes.
6. Exemple de série divergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ converge.
7. Exemple de série semi-convergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ diverge.

8.a Exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge sans que $u_n = o(1/n)$.

8.b Exemple de suite *positive* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge sans que $u_n = o(1/n)$.

9. Trouver une série divergente $\sum u_n$ et une série convergente $\sum v_n$ telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
10. Trouver une série divergente $\sum u_n$ et une série convergente $\sum v_n$ telles que $u_n \sim v_n$.
11. Trouver une série $\sum u_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$$

et qui soit absolument convergente (resp. semi-convergente ; resp. grossièrement divergente ; resp. divergente mais pas grossièrement divergente).

12. Exemple de série absolument convergente $\sum u_n$ pour laquelle il n'existe aucun exposant $\alpha > 1$ tel que $u_n = o(1/n^\alpha)$.
13. Exemple de séries convergentes $\sum u_n$ et $\sum a_n$ telles que $u_n = o(a_n)$ mais telles que le reste d'ordre n de $\sum u_n$ ne soit pas négligeable devant le reste d'ordre n de $\sum a_n$?

88. Méthodes

1. *Suite de* [**2**] – Comment se souvenir de la formule de sommation télescopique ?
2. *Suite de* [**3**] – Comment se souvenir de la formule de la série géométrique ?
3. Comment se souvenir de la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$$

conséquence de la relation de Chasles pour les intégrales ? Rattacher cette relation à la formule télescopique [**2**].

4. Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et tendent vers une même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
5. Comment démontrer que la série harmonique est divergente ?
6. Comment prouver qu'une série numérique diverge ?
7. Comment prouver qu'une série est semi-convergente ?
8. On suppose qu'une série n'est pas absolument convergente. Comment prouver qu'elle est divergente ?
9. La règle de D'Alembert permet-elle de caractériser les séries de Riemann convergentes ?
10. Comment trouver un ordre de grandeur des sommes partielles de la série $\sum |u_n|$?
11. Est-il utile de calculer un équivalent du terme général d'une série alternée ?
12. Est-il utile d'appliquer le critère spécial des séries alternées à une série absolument convergente ?
13. Comment calculer la somme d'une série ?

89. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**4**] –

1.a Identifier les endomorphismes $\sigma \circ \Delta$ et $\Delta \circ \sigma$.

1.b Relier Δ à la dérivation, ainsi que σ à la primitivation.

2. La série $\sum (-1)^n \cos n\theta$ est-elle une série alternée ?
3. *Suite de* [**80**] – Quelle est la meilleure manière de prouver que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est une série convergente ?

4. Peut-on déduire de [**28.3**] un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini ?
5. Nature de la série $\sum \frac{1}{n\,\ell n\, n\, \ell n(\ell n\, n)}$.
6. Étudier la réciproque de [**52. 2**].
7. Soit $\sum u_n$, une série semi-convergente de terme général complexe. Que dire de l'argument de u_n ?
8. Comparer $\sum u_n$ et $\sum v_n$ lorsque $|u_n| \leqslant |v_n|$ à partir d'un certain rang.
9. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la série $\sum u_n$ est semi-convergente, la série $\sum u_n v_n$ est-elle convergente ?
10. On suppose que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et que la série $\sum v_n$ est semi-convergente. Que dire de la série $\sum u_n$?
11. On suppose que $u_n = o(v_n)$.

11.a Si $\sum u_n$ est absolument convergente, que dire de $\sum v_n$?

11.b Si $\sum v_n$ est absolument convergente, que dire de $\sum u_n$?

11.c Si $\sum v_n$ est semi-convergente, que dire de $\sum u_n$?

12. On suppose que $u_n = o(v_n)$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang. Si $\sum u_n$ diverge, que dire de $\sum v_n$?

13.a À quelles séries de référence la règle de D'Alembert compare-t-elle une série ? Et la règle de Riemann ?

13.b Si la règle de D'Alembert prouve que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la règle de Riemann prouve aussi que cette série est absolument convergente.

13.c Si la règle de D'Alembert prouve que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, alors la règle de Riemann prouve aussi que cette série n'est pas absolument convergente.

14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement positive telle que u_{n+1}/u_n tende vers 1. Alors

$$\forall\, \theta > 1, \quad u_n = o(\theta^n) \qquad \text{et} \qquad \forall\, 0 < \theta < 1, \quad \theta^n = o(u_n).$$

15. *Suite de* [**57.3**] – Si $u_n \sim v_n$ et si la série $\sum v_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?
16. Dans quelle mesure le critère spécial des séries alternées [**11.4**] et les théorèmes de comparaison [**43**], [**44**] & [**45**] sont-ils complémentaires ?

Approfondissement

90. Utilisation d'un développement asymptotique

On suppose connu un développement asymptotique de la forme

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{b}{n^\beta} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\gamma}\Big)$$

avec $0 < \alpha < \beta < \gamma$.

90.1 La série $\sum u_n$ est la somme de trois séries dont la nature est connue si, et seulement si, $\gamma > 1$.

90.2 Elle converge absolument si, et seulement si, $\alpha > 1$.

90.3 Si $\alpha \leqslant 1 < \beta$, alors $\sum u_n$ est semi-convergente.

90.4 Si $\beta \leqslant 1$ et $b \neq 0$, alors $\sum u_n$ divergente.

91. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1. Comme $v_n \geqslant 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$, la série harmonique $\sum 1/n$ est divergente.
2. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell n\, 2$.

92. Nature de la série $\sum e^{-n^\alpha}$ en fonction du réel α.

93. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $u_n = 1/n$ si n est un carré parfait et que $u_n = 1/n^2$ dans le cas contraire. Nature de la série $\sum u_n$?

94. *Suite de* **[48]** – Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}.$$

Il existe un réel a tel que $\ell n\, u_n = \frac{-1}{3}\,\ell n\, n + a + o(1)$ et la série $\sum u_n$ est divergente.

95. Espérance d'une variable aléatoire discrète
On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et de limite nulle, telle que $a_0 > 0$.

1. On pose $u_0 = 0$ et $u_n = n(a_{n-1} - a_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1.a Que dire du signe de u_n ?

1.b
$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n - Na_N.$$

1.c
$$\forall\, N < P, \quad 0 \leqslant N(a_N - a_P) \leqslant \sum_{n=N+1}^{P} u_n.$$

2. La série $\sum a_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, leurs sommes sont égales.

3. Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente.
Dans ce cas,
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

96. Série harmonique alternée
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Le réel R_0 est égal à $-\ell n\, 2$. **[58.1]**

2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

3. Le reste R_n est équivalent à $(-1)^{n+1}/2n$ et la série $\sum R_n$ est semi-convergente.

97. Intégrales de Wallis
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{2n+1}\binom{2n}{n}^{-1}$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, →**[49.4]**

$$\binom{2n}{n}^2 \sim \frac{2^{4n}}{n\pi}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \ell n\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \ell n\, \frac{2}{\pi}$$

98. Deux irrationnels
On pose

$$x_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. On suppose qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Si $n!u_n \in \mathbb{Z}$ et si $0 < n!|x - u_n| < 1$ pour tout n assez grand, alors x est irrationnel.

2. Le réel y_0 est irrationnel car

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n!}\Big).$$

3. Le réel x_0 est irrationnel car

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}.$$

4. Comparer x_0 aux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$$

et en déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2x_0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 0.$$

99. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2.
$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

3.
$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = Nu_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

4. La somme de $\sum u_n$ est égale à $-\ell n\, 2$. **[58.1]**

100. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} - \ell n\, n.$$

1. Par concavité de ℓn,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n - u_{n-1} \leqslant \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} < 0.$$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n - u_{n-1} = \mathcal{O}(1/n^2)$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel α.

3. La série $\sum(-1)^n(u_n - \alpha)$ est semi-convergente.

4. Comme $|u_n - \alpha| \leqslant 1/2$ à partir d'un certain rang, la série $\sum(u_n - \alpha)^n$ est absolument convergente.

5. Comme $u_n \leqslant 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{u_n}}$ diverge.

101. Fonction ζ de Riemann
Pour tout $\alpha > 1$, on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

101.1 La fonction ζ est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$.

101.2 En admettant que $\zeta(2) = {}^{\pi^2}/_6$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

Pouvait-on prévoir le signe de la dernière somme ?

101.3 Comparaison avec des intégrales

1. La fonction ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^n}\Big).$$

2. La fonction ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1 et

$$\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1)\zeta(\alpha) = 1.$$

3. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

102. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{x^2 + k^2}.$$

1. Pour tout $x > 0$, la série $\sum u_k(x)$ converge. On note $S(x)$, sa somme et

$$\forall\, x > 0, \quad R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x).$$

2. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2} \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}.$$

3. Comparer

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

4. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) \geqslant \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

S'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant M_n,$$

alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

103. Pour tout $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}.$$

1. Il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, |h| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \big|S(1+h) - S(1)\big| \leqslant K|h|.$$

2. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = C.$$

3. Pour x voisin de 0, on a $S(x) \sim {}^1/_x$.
4. Il existe deux réels a et b tels que

$$S(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \mathcal{O}({}^1/_{x^4})$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

104. *Suite de* [**2.25**] – Au voisinage de $+\infty$,

$$G(x) = \frac{\zeta(2)}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Obtient-on un résultat aussi précis en comparant $G(x)$ à une intégrale ?

Pour aller plus loin

105. Questions pour réfléchir

1. Comparer la transformation d'Abel [**51**] et le critère spécial des séries alternées [**11.4**].
2. Comparer la transformation d'Abel [**51**] et la formule d'intégration par parties.
3. La série $\sum u_n$ est, par définition, une suite : laquelle ?
4. On suppose que la série de terme général

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

est convergente. Condition pour que la série $\sum u_n$ converge ?

5. Discuter l'utilité des règles de D'Alembert et de Riemann.
6. Propriétés de la série $\sum u_n$ lorsque :

6.a il existe $\alpha > 1$ tel que ${}^1/_{n^\alpha} = o(u_n)$;

6.b il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big).$$

7. *Suite de* [**95**] – Est-il possible que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 ?
8. *Suite de* [**98**] – Comment démontrer que le produit $x_0 y_0$ est égal à 1 ? Commenter.
9. *Suite de* [**101.3**] – Généraliser le développement asymptotique de $\zeta(n)$ au voisinage de $+\infty$.
10. Soit $\sum a_n$, une série convergente dont le terme général est positif. Construire une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ telle que la série $\sum a_n b_n$ converge.

106. La limite de la différence

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k}$$

est égale à la constante d'Euler γ [**48**]. Pourquoi ne peut-on pas la calculer en comparant chaque terme à une intégrale ?

107. On considère la suite de terme général

$$u_n = -\alpha\, \ell n\, n + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+1)}.$$

Ordre de grandeur de $(u_{n+1} - u_n)$ et nature de la suite en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

108. *Suite de* [**98**] – Si P est un polynôme à coefficients entiers, alors la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$$

est un multiple entier de x_0.

109. Séries de Bertrand

En discutant sur les réels α et β, étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha\, \ell n^\beta\, n}.$$

Pour $\alpha = 1$, calculer un équivalent des restes (en cas de convergence) ou des sommes partielles (en cas de divergence).

110. Produits infinis

À une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ de nombres réels *non nuls*, on associe la suite $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ définie par

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_n.$$

110.1✍ *Le* ***produit infini*** $\prod u_n$ *est dit* ***convergent*** *lorsque la suite* $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ *converge vers un réel non nul, qui est alors noté*

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Le produit infini $\prod u_n$ ***diverge*** *lorsque la suite* $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ *diverge ou tend vers 0.*

110.2 Exemples [24]

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{2} \qquad \prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big) = 1$$

110.3 Si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers 1.

110.4 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \ell\text{n}\, u_n$ converge.
2. Le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.
3. On suppose que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors le produit infini $\prod(1-u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.
4. Une suite de terme général strictement positif $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, le produit infini $\prod({}^{v_{n+1}}/{}_{v_n})$ est convergent.

111.1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\Big[1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\Big]$$

et $a_n = H_n - \ell\text{n}\, n$ [**14.1**].

1. La série $\sum(a_{n+1}-a_n)$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
2. Il existe une, et une seule, série $\sum w_k$ telle que

$$\ell\text{n}(\sqrt{n}u_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{a_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

et $w_k = \mathcal{O}(1/k\sqrt{k})$ lorsque k tend vers $+\infty$.

3. La série $\sum u_n$ est divergente.

111.2 Pour $\lambda > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \prod_{k=1}^{n}\Big[1+\frac{(-1)^{k-1}}{k^\lambda}\Big].$$

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
5. Si $\lambda \leqslant 1/2$, alors $\ell\text{n}\, v_{2n} \leqslant -1/2 H_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
6. Si $\lambda > 1/2$, alors la suite $(\ell\text{n}\, v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive.

112. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe deux réels $a < b$ distincts tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

1. Comme la série $\sum \ell\text{n}(u_{n+1}/u_n)$ diverge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. On pose $\alpha = b - a$, $v_0 = u_0$ et $v_n = n^\alpha u_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme la série $\sum \ell\text{n}(v_{n+1}/v_n)$ converge, alors il existe un réel $A > 0$ tel que

$$u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}.$$

On peut en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

113. On considère la série de terme général $u_n = f(n)$ où f est une fonction strictement positive et de classe $\mathscr{C}^1$.

113.1 Si le quotient $f'(x)/f(x)$ tend vers λ lorsque x tend vers $+\infty$, alors le quotient u_{n+1}/u_n tend vers e^λ.

113.2 Si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument et on déduit de la relation

$$R_{n+1} \sim e^\lambda R_n$$

entre les restes d'ordres n et $(n+1)$ que

$$R_n \sim \frac{u_{n+1}}{1-e^\lambda}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

114. On étudie la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

114.1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}.$$

Comme $u_n \geqslant v_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et que $v_n \sim 1/n$, la série $\sum u_n$ est divergente.

114.2 *Suite de* [**112**] – Plus précisément, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$3n(u_n - u_{n+1}) = u_n$$

donc il existe un réel $A > 0$ tel que $u_n \sim A/\sqrt[3]{n}$.

115. Quelle que soit la permutation σ de $\mathbb{N}^*$, la série

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

est divergente. (On étudiera le cas de l'identité et le cas d'une transposition, avant de généraliser.)

116. Relation de comparaison Θ

On note $u_n = \Theta(v_n)$ lorsqu'il existe deux constantes $0 < a < b$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant b|u_n|.$$

1. La relation Θ est symétrique : $u_n = \Theta(v_n)$ si, et seulement si, $v_n = \Theta(u_n)$.
2. Si $u_n = \Theta(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\sum v_n$ est absolument convergente.

117.

1.
$$\forall\, a \geqslant 0, \quad \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}$$

2.
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t} = \Theta\Big(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\Big)$$

3. La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha\sin^2 t}\Big]$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 2$.