7
Arithmétique

I
Arithmétique euclidienne

1. Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont tous deux munis d'une **division euclidienne**. L'arithmétique de ces anneaux est l'étude des propriétés qui se déduisent de la division euclidienne.
Dans ce qui suit, A désignera aussi bien $\mathbb{Z}$ que $\mathbb{K}[X]$.
L'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par un entier x_0 sera noté $x_0\mathbb{Z}$ ou $\langle x_0\rangle$.
De même, l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme P_0 sera noté $\langle P_0\rangle$.

2. Lemme fondamental

2.1 ➙ *Un élément $x \neq 0$ de A divise $y \in A$ si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de y par x est nul.*

2.2 Applications

1. L'ensemble des solutions $x \in \mathbb{Z}$ de $x+1 \mid x+3$ est égal à $\{-3,-2,0,1\}$.
2. Un entier $x \in \mathbb{Z}$ est solution de $x+2 \mid x^2+2$ si, et seulement si, $x+2$ divise 6.
3. Le polynôme $X^4+X^3+aX^2+bX+2$ est divisible par X^2+2 dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, $(a,b)=(3,2)$.
4. Soit $n \geqslant 1$. Le polynôme $aX^{n+1}+bX^n+1$ est divisible par $(X-1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, $a=n$ et $b=-(n+1)$. Dans ce cas, le quotient de la division euclidienne est égal à

$$nX^{n-1}+(n-1)X^{n-2}+\cdots+3X^2+2X+1.$$

5. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est divisible par son polynôme dérivé P' si, et seulement si, il existe deux scalaires α, β et un entier $n \geqslant 1$ tels que $P=\alpha(X-\beta)^n$.

I.1 PGCD

3.1 ✍ *Soient a et b, deux éléments de A. Un élément d de A est **un plus grand commun diviseur (pgcd)** de a et b lorsque*

$$dA = aA+bA.$$

3.2 Quels que soient a et b dans A, il existe au moins un pgcd $d \in A$ de a et b et si $(a,b) \neq (0,0)$, alors il existe un, et un seul, pgcd normalisé.

3.3 Pour tout pgcd d de a et b, il existe u et v dans A tels que $au+bv=d$.

3.4 ✍ **PGCD normalisé**

*Soit $(a,b) \neq (0,0)$, un couple d'éléments de A. **Le pgcd** de a et de b est l'unique élément normalisé d_0 de A tel que*

$$d_0A = aA+bA.$$

Ce pgcd est noté $a \wedge b$.

3.5 Cas particuliers

1. Si a ou b est inversible, alors $a \wedge b = 1$.
2. Si $a=0$, alors b est un pgcd de a et b.
3. Le pgcd de a et b est nul si, et seulement si, $a=b=0$.

4. ➙ **Caractérisation des PGCD**

Soient a, b et d, trois éléments de A. Alors d est un pgcd de a et b si, et seulement si,

1. *l'élément d divise a et b et*
2. *tout élément δ qui divise a et b divise également d.*

5. Éléments premiers entre eux

Le cas particulier où deux éléments sont *premiers entre eux* n'est en fait pas loin d'être le cas général. →**[10.3]**

5.1 ✍ *Deux éléments a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur pgcd $a \wedge b$ est égal à 1, c'est-à-dire*

$$aA+bA = A.$$

5.2 Soient a et b, deux éléments premiers entre eux. Si $x \mid a$ et si $y \mid b$, alors x et y sont premiers entre eux.

5.3 ➙ *Deux éléments a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, tout diviseur commun à a et à b est inversible.*

5.4 Soient a et b, deux éléments normalisés. Si d est le pgcd normalisé de a et b, alors il existe deux éléments normalisés α et β tels que $a=d\alpha$ et $b=d\beta$.

5.5 ➙ *Deux éléments irréductibles normalisés sont égaux ou premiers entre eux.*

5.6 Si a est irréductible et si a ne divise pas b, alors

$$aA \subsetneq aA+bA = A$$

donc a et b sont premiers entre eux. →**[6.70.6]**

5.7 Si a est irréductible sans être premier à b, alors a divise b.

5.8 Si a divise b et si a et b sont premiers entre eux, alors a est inversible.

6. PGCD d'une famille finie

6.1 ✍ *On appelle **pgcd** d'une famille finie $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de A tout élément $d \in A$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_iA = dA.$$

6.2 Toute une famille finie admet au moins un pgcd et si elle n'est pas la famille nulle, alors elle admet un, et un seul, pgcd normalisé.

6.3 Un élément d_0 de A est un pgcd de $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad d_0 \mid a_i, \\ \forall\, D \in A, \quad \big(\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad D \mid a_i\big) \implies D \mid d_0. \end{cases}$$

6.4 Pour tout $1 \leqslant k < n$, un pgcd de $pgcd(a_1,\ldots,a_k)$ et de $pgcd(a_{k+1},\ldots,a_n)$ est un pgcd de $(a_1,\ldots,a_n)$.

6.5 Un pgcd de $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est inversible si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^{n} a_iA = A.$$

6.6 ✍ *Les éléments $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont **premiers dans leur ensemble**, ou **globalement premiers entre eux**, lorsqu'ils admettent 1 pour pgcd.*

6.7 Si deux des éléments $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont premiers entre eux, alors les $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont premiers dans leur ensemble.

6.8 Des éléments peuvent être premiers dans leur ensemble sans être deux à deux premiers entre eux. →**[25.2]**

I.2 PPCM

7.1 ✍ *Soient a et b dans A. Un élément m de A est **un plus petit commun multiple (ppcm)** de a et b lorsque*

$$mA = aA \cap bA.$$

7.2 Quels que soient a et b dans A, il existe au moins un ppcm de a et b. Si a et b sont non nuls, alors il existe un, et un seul, ppcm normalisé.

7.3 Pour tout ppcm m de a et de b, il existe deux éléments u et v de A, premiers entre eux, tels que

$$m = au = bv.$$

7.4 ✍ **PPCM normalisé**

*Soient a et b dans A, non nuls. **Le ppcm** de a et b est l'unique élément normalisé m_0 de A tel que*

$$m_0A = aA \cap bA.$$

Ce ppcm est noté $a \vee b$.

7.5 Cas particuliers

1. Si a est inversible, alors b est un ppcm de a et b.
2. L'élément nul 0 est un ppcm de a et b si, et seulement si, a ou b est nul.

8. ⇀ Caractérisation des PPCM

Soient a, b et m, trois éléments de A. Alors m est un ppcm de a et b si, et seulement si,

1. *l'élément m est un multiple de a et de b et*
2. *tout élément μ de A qui est un multiple de a et de b est aussi un multiple de m.*

9. PPCM d'une famille finie

9.1 ✍ *On appelle **ppcm** d'une famille finie $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de A tout élément $m \in A$ tel que*

$$\bigcap_{i=1}^{n} a_i A = mA.$$

9.2 Toute une famille finie admet au moins un ppcm. Si aucun de ses éléments n'est nul, alors elle admet un, et un seul, ppcm normalisé.

9.3 Un élément m_0 de A est un ppcm de $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i \mid m_0, \\ \forall\, M \in A, \quad \big(\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i \mid M\big) \implies m_0 \mid M. \end{cases}$$

9.4 Pour tout $1 \leqslant k < n$, un ppcm de $ppcm(a_1, \dots, a_k)$ et de $ppcm(a_{k+1}, \dots, a_n)$ est un ppcm de $(a_1, \dots, a_n)$.

I.3 Théorème de Bézout

10. Le théorème de Bézout donne une caractérisation efficace des couples d'éléments premiers entre eux.

10.1 ⇀ Théorème de Bézout

Deux éléments a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(u, v) \in A \times A$ tel que

$$1 = au + bv.$$

10.2 Si a et b sont premiers entre eux et si $1 = au + bv$, alors u et v sont premiers entre eux.

10.3 ⇀ *L'élément d est un pgcd de a et b si, et seulement si, il existe deux éléments α et β premiers entre eux de A tel que*

$$a = d\alpha \qquad et \qquad b = d\beta.$$

11. ⇀ *Si a et b sont premiers entre eux et divisent c, alors le produit ab divise c.*

12. ⇀ *Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge (bc) = 1$.*

13. ▷ *Si a et b sont premiers entre eux, alors*

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, \quad a^m \wedge b^n = 1.$$

14. ▷ *S'il existe deux entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ tels que a^m et b^n soient premiers entre eux, alors a et b sont premiers entre eux.*

Applications

15. Équations diophantiennes du premier ordre [90]

1. L'équation $3x - 12y = 10$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Le couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de $7x + 5y = 4$ si, et seulement si,

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad (x, y) = (2, -2) + (5k, -7k).$$

Cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

3.a Le couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de

$$3x + 7y = n \tag{1}$$

si, et seulement si,

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad (x, y) = (-2n + 7k, n - 3k).$$

3.b L'équation (1) admet au moins une solution dans $\mathbb{N}^2$ pour tout $n \geqslant 21$.

16. Exemples d'entiers premiers entre eux

16.1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Les entiers n et $n \pm 1$ sont premiers entre eux.
2. Les entiers $2n - 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

16.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Les entiers n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
4. Les entiers $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

16.3 Les entiers $n^2 + n$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux, de même que les entiers $3n^2 + 2n$ et $n + 1$. →**[12]**

17. PGCD et racines communes de deux polynômes

17.1 Si deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux, alors ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{K}$.

17.2 Si deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ n'ont aucune racine commune, alors ils sont premiers entre eux.

17.3 Si P est scindé à racines simples, alors P et P' sont premiers entre eux.

17.4 Les polynômes $(X^2 + 1)$ et $(X^2 + 1)X$ n'ont aucune racine réelle commune, alors qu'ils sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

17.5 Soient P et Q, deux polynômes premiers entre eux à coefficients complexes.

1. Les polynômes $A = P + iQ$ et $B = P - iQ$ sont premiers entre eux.
2. Toute racine double de $P^2 + Q^2$ est une racine double de A ou de B et aussi une racine de $(P')^2 + (Q')^2$.

18. Deux polynômes non nuls A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement si, les polynômes $A + B$ et AB sont premiers entre eux.

I.4 Théorème de Gauss

19. On suppose que a et b sont premiers entre eux.

19.1 Pour tout $c \in A$, il existe $(u, v) \in A \times A$ tel que

$$c = auc + bvc.$$

19.2 ⇀ Théorème de Gauss

Si a et b sont premiers entre eux et si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

19.3 Si $a \mid b$, alors a est un élément inversible de A.

19.4 Si a^2 divise b^2, alors a est inversible dans A.

Applications

20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier $n + 1$ divise le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

21. Si a et b sont premiers entre eux, alors le produit ab est un ppcm de a et b.

22. Soient d, un pgcd de a et b et m, un ppcm de a et b.

22.1 Il existe α, β et μ tels que $a = d\alpha$, $b = d\beta$ et $m = d\mu$. Le produit $d\alpha\beta$ est un ppcm de a et b **[21]**.

22.2 Les produits md et ab sont associés.

22.3 ⇀ *Le produit ab est un ppcm de a et b si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.*

22.4 Le produit des a_i est un ppcm de $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si, et seulement si, les a_i sont deux à deux premiers entre eux.

23. Factorisation d'un diviseur de ab

Soient a et b, deux éléments premiers entre eux et x, un diviseur du produit ab. On pose $x_1 = x \wedge a$ et $x_2 = x \wedge b$.

1. Le produit $x_1 x_2$ est associé à x.
2. Il existe deux éléments y_1 et y_2 tels que

$$y_1 \mid a, \quad y_2 \mid b \quad \text{et} \quad x = y_1 y_2.$$

Le couple (y_1, y_2) est essentiellement unique : discuter.

24. Factorisation d'un carré parfait

Soient a et b, deux éléments premiers entre eux de $A = \mathbb{Z}$ ou de $A = \mathbb{K}[X]$. On suppose qu'il existe $c \in A$ tel que

$$ab = c^2.$$

1. Si $d = a \wedge c$, alors il existe α et γ dans A, premiers entre eux, tels que $a = d\alpha$ et $c = d\gamma$.

2. Comme d et α sont premiers à b, il existe un élément α_0 de A tel que $\alpha_0 b = \gamma^2$.
3. Comme α_0 et γ sont premiers entre eux, alors α_0 est inversible dans A.
4. Les facteurs a et b sont associés à des carrés parfaits.

On peut aussi exploiter la décomposition en produit de facteurs irréductibles des éléments de A.

I.5 Applications

Théorème de décomposition des noyaux

25. Dans l'anneau $A = \mathbb{Z}$ ou dans l'anneau $A = \mathbb{K}[X]$, on considère des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ deux à deux premiers entre eux.

25.1 On pose

$$x = x_1 x_2 \cdots x_n$$

et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad y_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} x_i$$

de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x = x_k y_k \quad \text{et} \quad x_k \wedge y_k = 1.$$

25.2 ➙ *Les éléments $y_1, \dots, y_n$ sont premiers dans leur ensemble : il existe des éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ de A tels que*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k y_k = 1.$$

26. Applications dans $\mathbb{K}[X]$

26.1 Si λ et μ sont deux scalaires distincts, alors les polynômes $X - \lambda$ et $X - \mu$ sont premiers entre eux :

$$\frac{1}{\lambda - \mu}(X - \mu) + \frac{-1}{\lambda - \mu}(X - \lambda) = 1.$$

26.2 Si le polynôme P est scindé :

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

(où les racines λ_i sont deux à deux distinctes et les multiplicités m_i strictement positives), alors les facteurs $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux et le théorème **[25.2]** peut s'appliquer.

Factorisation des polynômes

27. On sait qu'on peut factoriser, de manière unique, tout entier naturel non nul en produit d'entiers premiers et qu'on peut obtenir cette factorisation par la méthode du **crible**.
Une factorisation analogue existe dans $\mathbb{K}[X]$, mais comme l'ensemble des polynômes n'est pas muni d'une relation d'ordre naturelle, le calcul effectif de cette factorisation est un problème difficile.

28. On notera $\mathfrak{P}$, l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires et Ω, l'ensemble des familles presque nulles d'exposants entiers indicées par $\mathfrak{P}$. On rappelle que la famille d'entiers naturels

$$(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}} \in \mathbb{N}^{\mathfrak{P}}$$

est **presque nulle** lorsque l'ensemble des polynômes $R \in \mathfrak{P}$ tels que $\varepsilon_R \neq 0$ est fini (éventuellement vide).

28.1 Si $(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}} \in \Omega$, alors le produit

$$\prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\varepsilon_R}$$

est un polynôme en tant que produit d'un nombre fini de polynômes différents du monôme 1.

28.2 Soient $R_0 \in \mathfrak{P}$ et $\nu \in \mathbb{N}$. Si R_0^ν divise le polynôme

$$P = \prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\varepsilon_R} = R_0^{\varepsilon_0} \prod_{\substack{R \in \mathfrak{P} \\ R \neq R_0}} R^{\varepsilon_R},$$

où $(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}}$ est une famille presque nulle d'entiers, alors R_0^ν divise $R_0^{\varepsilon_0}$ et $\nu \leqslant \varepsilon_0$.

28.3 Soient $(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}}$ et $(\nu_R)_{R \in \mathfrak{P}}$, deux familles presque nulles d'entiers. Alors

$$\prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\nu_R} \quad \text{divise} \quad \prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\varepsilon_R}$$

si, et seulement si, $\nu_R \leqslant \varepsilon_R$ pour tout $R \in \mathfrak{P}$.

28.4 Si $(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}}$ et $(\nu_R)_{R \in \mathfrak{P}}$ sont deux familles presque nulles d'entiers telles que

$$\prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\varepsilon_R} = \prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\nu_R},$$

alors $\varepsilon_R = \nu_R$ pour tout $R \in \mathfrak{P}$.

29. ➙ *Tout polynôme de degré 1 est irréductible.*

30. ➙ **Théorème de D'Alembert-Gauss**
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

31. ▷ *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.*

32. ➙ **Décomposition en produit d'irréductibles**
Pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une, et une seule, famille presque nulle d'entiers $(\varepsilon_R)_{R \in \mathfrak{P}}$ telle que

$$P = \prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{\varepsilon_R}$$

où $\mathfrak{P}$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

33. Application au pgcd
Soient $P_1, \dots, P_n$, des polynômes unitaires de $\mathbb{K}[X]$. Le pgcd et le ppcm de ces polynômes sont respectivement égaux à

$$\prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{m_R} \qquad \text{et} \qquad \prod_{R \in \mathfrak{P}} R^{M_R}$$

où

$$m_R = \min\{\varepsilon_R(P_1), \dots, \varepsilon_R(P_n)\},$$
$$M_R = \max\{\varepsilon_R(P_1), \dots, \varepsilon_R(P_n)\}$$

pour tout $R \in \mathfrak{P}$.

Entraînement

34. Questions pour réfléchir

1. Si $(a, b) = (0, 0)$, alors il existe un seul pgcd de a et b.
2. L'égalité $6 = -3 \times 8 + 1 \times 30$ signifie-t-elle que 6 est un pgcd de 8 et de 30 ?
3. Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.

4.a Si n est un entier impair, alors n et 2 sont premiers entre eux.

4.b Un entier pair et un entier impair sont-ils nécessairement premiers entre eux ?

5. Les entiers 123 456 789 et 123 456 787 sont premiers entre eux.
6. Les égalités $60 = 6 \times 10 = 20 \times 3$ signifient-elles que 60 est un ppcm de 6 et de 20 ?
7. Soient x et y, deux éléments normalisés. Les propositions suivantes sont équivalentes :

7.a $x \mid y$
7.b $x = x \wedge y$
7.c $y = x \vee y$

8. S'il existe $(u,v) \in A \times A$ tel que

$$x = au + bv,$$

alors le pgcd de a et de b divise x.

9. Soient x et y, deux éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{K}[X]$. Si x^2 divise y^2, alors x divise y. →**[19.4]**

10. Si P et Q sont deux polynômes tels que $Q^2 = XP^2$, alors $P = Q = 0$.

11. Adapter le théorème de factorisation **[32]** au cas d'un polynôme qui n'est pas unitaire.

35. On pose $u_n = n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On a $u_n = n(3n-2) \pmod{10}$.
2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

2.a L'entier u_n est un multiple de 10.

2.b L'un des entiers n ou $3n-2$ est un multiple de 10.

2.c L'entier n est congru à 0 ou à 4 modulo 10.

36. Soient $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \big\{(p,q) \in I \,:\, p \wedge q = n\big\}.$$

Alors $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est une partition de I et comme l'application

$$[(\alpha,\beta) \mapsto (n\alpha, n\beta)]$$

est une bijection de I_1 sur I_n, alors

$$\sum_{(p,q)\in I} \frac{1}{p^2q^2} = \Big(\sum_{(p,q)\in I_1} \frac{1}{p^2q^2}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\Big).$$

37. Soient m et n, deux entiers supérieurs à 2.

37.1 Il existe une famille d'entiers premiers $(p_1,\dots,p_r)$ et deux familles d'entiers naturels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ et $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ telles que

$$m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k} \quad \text{et que} \quad n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\beta_k}.$$

Discuter l'unicité de ces factorisations.

37.2 L'entier m^2 est un diviseur de n^2 si, et seulement si, l'entier m est un diviseur de n.

37.3 Retrouver le résultat établi au **[24]**.

38. Soit $n \geqslant 2$, un entier naturel. On note N, le nombre de diviseurs de n (compris entre 1 et n inclus) et P, le produit des diviseurs de n.

38.1 Le nombre N est impair si, et seulement si, n est un carré parfait.

38.2 En regroupant deux par deux les diviseurs de n dans le produit P^2 pour former N produits égaux à n, on obtient

$$P^2 = n^N.$$

39. Soit $n \geqslant 2$, un entier naturel. On note N, le nombre de diviseurs de n (compris entre 1 et n inclus).

39.1 Si la factorisation de n en produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k},$$

alors **[37]**

$$N = \prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1).$$

39.2 On suppose ici que n possède 15 diviseurs. Si n est divisible par 6, mais pas par 8, alors $n = 324$.

39.3 Le plus petit entier qui possède exactement 28 diviseurs est égal à 960.

39.4 Retrouver le résultat établi au **[38]**.

40. Fonction de Möbius

On dit qu'un entier n est **sans facteur carré** lorsqu'il peut se factoriser sous la forme

$$n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r$$

où les p_k sont des nombres premiers deux à deux distincts.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mu(n) = 0$ lorsqu'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n et $\mu(n) = (-1)^r$ lorsque n est le produit de r nombres premiers deux à deux distincts.

40.1 On considère la factorisation d'un entier $n \geqslant 2$ en produits de facteurs premiers :

$$n = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k}$$

où les α_k sont des entiers naturels non nuls.
Alors l'entier n admet 2^s diviseurs sans facteur carré et

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} (-1)^r = 0.$$

40.2 On définit une partition dénombrable de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \big\{(p,q) \in I \,:\, pq = n\big\}.$$

On en déduit que

$$\Big(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\Big)\Big(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mu(q)}{q^2}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{n^2}\Big) = 1.$$

41. Soient A et B, deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. S'il existe un nombre premier p qui divise tous les coefficients du produit AB, alors p divise tous les coefficients de A ou tous les coefficients de B.

42. Si A et B sont deux polynômes premiers entre eux, alors

$$\forall\, C \in \mathbb{K}[X], \quad A \wedge (BC) = A \wedge C.$$

II

Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

43. L'*arithmétique modulaire* est une initiation, limitée ici à l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$, à la structure d'**anneau quotient**. →**[113]**

44.1 ✍ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un entier $a \in \mathbb{Z}$ est **congru modulo** n à $b \in \mathbb{Z}$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn$. On note alors :*

$$a = b \pmod{n}$$

ou encore $a \equiv b\ [n]$.

44.2

$$\begin{aligned} a = b \pmod{n} &\iff n \mid (b-a) \\ &\iff b = a \pmod{n} \end{aligned}$$

44.3 Exemples

1. Pour tout entier n,

$$n(n+1) = 0 \pmod 2 \quad \text{et} \quad (n-1)n(n+1) = 0 \pmod 3.$$

2. Si $p > 3$ est premier, alors $p^2 = 1 \pmod{24}$.

II.1 Classes de congruence modulo n

45.1 ➙ *La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.*

45.2 ✍ *La **classe modulo** n de $a \in \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers congrus à a modulo n.*

$$\mathscr{C}(a) = \{a + kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Elle est aussi notée $a + n\mathbb{Z}$, $\overline{a}$, $\dot{a}$, ou même a (quand aucune ambiguïté n'est possible).

45.3

$$\mathscr{C}(a) = \mathscr{C}(b) \iff b \in \mathscr{C}(a)$$

45.4 Si $\mathscr{C}(a) \cap \mathscr{C}(b) \neq \varnothing$, alors $\mathscr{C}(a) = \mathscr{C}(b)$.

45.5 Si $r \in \mathbb{N}$ est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $\mathscr{C}(a) = \mathscr{C}(r)$.

46.1 ✍ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes de congruence modulo n des éléments de $\mathbb{Z}$.*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathscr{C}(a),\ a \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathbb{Z} = \bigcup_{a\in\mathbb{Z}} \mathscr{C}(a) = \bigsqcup_{C\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} C$$

46.2 L'application $\mathscr{C}$ est une surjection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

46.3 ✍ *Un entier $k \in \mathbb{Z}$ est un **représentant** de la classe $C \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque $C = \mathscr{C}(k)$.*

47. ➙ *Le cardinal de l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à n et*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathscr{C}(r),\ 0 \leqslant r < n\}.$$

48. L'ensemble $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est constitué d'une part de l'ensemble $\mathscr{C}(0)$ des entiers pairs et de l'ensemble $\mathscr{C}(1)$ des entiers impairs.

II.2 Opérations modulo n

Addition

49.1 Quels que soient $\alpha \in \mathscr{C}(a)$ et $\beta \in \mathscr{C}(b)$,

$$\mathscr{C}(\alpha + \beta) = \mathscr{C}(a + b).$$

49.2 ✍ *Soient C_1 et C_2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: il existe a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $C_1 = \mathscr{C}(a)$ et $C_2 = \mathscr{C}(b)$ et la **somme** de C_1 et de C_2 est définie par*

$$C_1 \oplus C_2 = \mathscr{C}(a + b).$$

49.3 ➙ *L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de $\oplus$ est un groupe cyclique.*

49.4 ➙ *Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$.*

50. Exemples de morphismes de groupes

1. Le seul morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est le morphisme trivial : $[x \mapsto 0]$.
2. Il existe six morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{U}_6$, dont seulement deux sont des isomorphismes.
3. Si f est un automorphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors $f(1)$ est un élément d'ordre 4. Les automorphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont $[x \mapsto x]$ et $[x \mapsto -x]$.
4. Il existe autant de morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ que d'éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dont l'ordre divise n.

Multiplication modulo n

51.1 Quels que soient $\alpha \in \mathscr{C}(a)$ et $\beta \in \mathscr{C}(b)$,

$$\mathscr{C}(\alpha\beta) = \mathscr{C}(ab).$$

51.2 ✍ *Soient C_1 et C_2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: il existe a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $C_1 = \mathscr{C}(a)$ et $C_2 = \mathscr{C}(b)$ et le **produit** de C_1 et de C_2 est défini par*

$$C_1 \otimes C_2 = \mathscr{C}(ab).$$

51.3 ➙ *L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de $\oplus$ et de $\otimes$ est un anneau commutatif.*

52. Calculs de puissances

52.1

$$\forall\ a \in \mathbb{Z}, \forall\ m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathscr{C}(a^m) = \mathscr{C}(a)^{\otimes m}.$$

52.2 La suite des puissances de $\mathscr{C}(a)$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est périodique à partir d'un certain rang :

$$\exists\ 1 \leqslant p \leqslant n,\ \exists\ 0 \leqslant n_0 < n,\ \forall\ q \geqslant n_0, \quad \big[\mathscr{C}(a)\big]^{q+p} = \big[\mathscr{C}(a)\big]^q.$$

52.3 Exemples

1. Le chiffre des unités de $7^{(7^7)}$ est égal à 3 et celui de $(7^7)^7$ est égal à 7.
2. Le chiffre des unités de 1789^{1515} est égal à 9.
3. $5^{2n} + 5^n = 0 \pmod{13} \iff n = 2 \pmod 4$.
4. L'équation $x^3 = x$ a trois solutions dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, mais elle en a 9 dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 5n^3 + n &= 0 \pmod 6 \\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} &= 0 \pmod 7 \\ 2^{2n+1} + 3^{2n+1} &= 0 \pmod 5 \\ 5^4.3^{8n} + 7^3.5^{6n} &= 0 \pmod{11} \\ 4^n &= 3n + 1 \pmod 9 \\ 16^n &= 15n + 1 \pmod{225} \end{aligned}$$

Morphisme canonique

53. ✍ *L'application $\mathscr{C} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est appelée **réduction modulo** n ou **projection canonique sur** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

54. ➙ *La réduction modulo n est un morphisme surjectif de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sur l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ et son noyau est $n\mathbb{Z}$.*

55. Preuve par 9

Pour tout entier $a \in \mathbb{N}$, on note n_a, la somme des chiffres utilisés pour écrire a en base dix (écriture décimale habituelle) et on suppose ici que $\mathscr{C}$ désigne la réduction modulo 9.

1. $$\forall\ a \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{C}(a) = \mathscr{C}(n_a).$$
2. Si $c = ab$, alors $\mathscr{C}(n_c) = \mathscr{C}(n_a) \otimes \mathscr{C}(n_b)$.

II.3 Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

56. Exemples de tables de multiplication

L'élément 0 est absorbant pour la multiplication dans chaque anneau : il est inutile de le faire apparaître dans la table de multiplication.

Les anneaux considérés sont commutatifs : les tables de multiplication sont symétriques.

Table de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Table de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\times$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Les carrés apparaissent sur la diagonale.

Un élément est inversible si, et seulement si, le nombre 1 apparaît dans sa colonne.

Un élément est un diviseur de zéro si, et seulement si, le nombre 0 apparaît dans sa colonne.

57. Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, non nul.

57.1 La classe $\mathscr{C}(n-1)$ est inversible et égale à son inverse.

57.2 ➙ *La classe $\mathscr{C}(a)$ est inversible pour la structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, a et n sont premiers entre eux.*

57.3 Si $1 < p < n$ divise n, alors la classe $\mathscr{C}(p)$ est un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

58. ➙ *L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un corps si, et seulement si, l'entier n est un nombre premier.*

59. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

59.1 Le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\mathscr{C}_n(1)$.

59.2 ➙ *L'élément $\mathscr{C}_n(k)$ engendre le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, il est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

60. Exemples

60.1 Il y a 24 éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/78\mathbb{Z}$.

60.2 Dans l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, l'élément 3 est inversible et l'équation $3x+4=0$ admet $x=2$ pour seule solution.

60.3 Dans un anneau de cardinal *fini*, on peut chercher les racines d'un polynôme en évaluant ce polynôme en chaque point. Dans un *corps fini*, on peut ainsi obtenir la forme factorisée **[32]** de ce polynôme. Ainsi, dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,

$$X^5-3X^4-2X^3+2X^2+3X-1=(X-1)(X-3)^2(X+2)^2.$$

60.4 Sur le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, le système

$$\begin{cases} 3x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

est un système de Cramer et admet $(1,0)$ pour unique solution. Sur l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, son déterminant n'est pas inversible et le système admet $(1,0)$ et $(3,2)$ pour solutions.

60.5 Le système

$$\begin{cases} 6x+7y=30 \\ 3x-7y=0 \end{cases}$$

admet $(28,12)$ pour seule solution dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

61. Petit théorème de Fermat

Le *petit théorème de Fermat* permet de simplifier le calcul des puissances d'un entier n modulo un nombre premier p. Ce résultat sera généralisé avec le théorème d'Euler **[72.3]**.

61.1 Si p est un nombre premier, alors pour tout $1\leqslant k<p$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est un multiple de p.

61.2 ➙ *Soit p, un nombre premier. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$n^p=n \pmod p$$

et si n n'est pas un multiple de p, alors

$$n^{p-1}=1 \pmod p.$$

61.3 Applications simples

1. $2^{123}+3^{121}=0 \pmod{11}$
2. $1234^{4321}+4321^{1234}=4 \pmod 7$

61.4 Résidus quadratiques

Soient $p\geqslant 3$, un nombre premier impair et $\mathbb{K}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
On pose $q=(p-1)/2$.

1. Si le degré de $P\in\mathbb{K}[X]$ est égal à $d\in\mathbb{N}$, alors **[6.82. 4]** le polynôme P admet au plus d racines dans le corps $\mathbb{K}$.
2. Il y a exactement q carrés non nuls dans $\mathbb{K}$ et chaque carré $x\neq 0$ est une racine de (X^q-1).
3. Le polynôme $X^{p-1}-1=(X^q-1)(X^q+1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.
4. Un élément non nul x de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré si, et seulement si, $x^q=1$.

II.4 Lemme chinois

62. Soient m et n, deux entiers premiers entre eux.

62.1 Il existe deux entiers e_1 et e_2 tels que

$$\begin{cases} e_1\equiv 1 \pmod m \\ e_1\equiv 0 \pmod n \end{cases} \quad\text{et que}\quad \begin{cases} e_2\equiv 0 \pmod m \\ e_2\equiv 1 \pmod n. \end{cases}$$

62.2 Si x et x' sont deux entiers tels que

$$\begin{cases} x\equiv x' \pmod m \\ x\equiv x' \pmod n, \end{cases}$$

alors $x\equiv x' \pmod{mn}$.

62.3 ➙ *Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors*

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{Z}^2,\ \exists\,x\in\mathbb{Z},\quad \begin{cases} x\equiv a \pmod m \\ x\equiv b \pmod n. \end{cases}$$

De plus, si x_0 est une solution particulière de ce système, alors x est une solution de ce système si, et seulement si,

$$x\equiv x_0 \pmod{mn}.$$

63. Un isomorphisme canonique

Soient m et n, deux entiers naturels premiers entre eux.

63.1 L'application

$$\begin{aligned}\Phi:\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ k &\mapsto \big(\mathscr{C}_m(k),\mathscr{C}_n(k)\big)\end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

63.2 Il existe un morphisme d'anneaux Ψ de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que →**[111.3]**

$$\forall\,k\in\mathbb{Z},\quad \Psi\big(\mathscr{C}_{mn}(k)\big)=\big(\mathscr{C}_m(k),\mathscr{C}_n(k)\big).$$

63.3 ➙ *L'application Ψ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

63.4 Action sur les éléments inversibles

1. L'image $\Psi(x)$ de tout élément inversible $x\in(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ appartient à $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
2. Quels que soient $\alpha\in(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ et $\beta\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, il existe un, et un seul, $x\in(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ tel que $\Psi(x)=(\alpha,\beta)$.

L'isomorphisme Ψ induit une bijection de l'ensemble $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ sur le produit cartésien $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. →**[73.3]**

64. Généralisation

64.1 Soient m_1, m_2, …, m_n, des entiers naturels deux à deux premiers entre eux.

1. Pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, on pose

$$M_i=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} m_j$$

et **[25.2]** il existe $u_i\in\mathbb{Z}$ tel que $M_iu_i\equiv 1 \pmod{m_i}$.

2. Quels que soient les entiers a_1, a_2, …, a_n, l'entier

$$x=\sum_{i=1}^n a_iM_iu_i\in\mathbb{Z}$$

vérifie $x\equiv a_i \pmod{m_i}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$.

2.a Si $y\in\mathbb{Z}$ vérifie $y\equiv a_i \pmod{m_i}$ pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, alors la différence $x-y$ est divisible par le produit $m_1m_2\cdots m_n$.

64.2 Un entier x

$$\begin{cases} x\equiv 3 \pmod 5 \\ x\equiv 1 \pmod 6 \\ x\equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

si, et seulement si,

$$\exists\,k\in\mathbb{Z},\quad x=163+210k.$$

Entraînement

65. Questions pour réfléchir

1. Si $a=b \pmod n$, alors $a^n=b^n \pmod{n^2}$.
2. Soit $n\geqslant 2$, un entier.

2.a Soit $x\in\mathbb{N}^*$. Il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que n divise x^k si, et seulement si, tout diviseur premier de n est aussi un diviseur premier de x.

2.b Il existe des éléments nilpotents dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, n est divisible par le carré d'un nombre premier.

66. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p premier. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\sigma_k = \sum_{x\in\mathbb{K}} x^k.$$

Comme

$$\sigma_k^2 = \sum_{a\in\mathbb{K}^*}\sum_{x\in\mathbb{K}} (ax)^k = (p-1)\sigma_k,$$

alors σ_k est égal à 0 ou à -1.

67. Applications du lemme chinois [62.3]
Un entier $x \in \mathbb{N}$ est une solution du système

$$\begin{cases} x &= 1 \pmod 6 \\ x &= 2 \pmod 7 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 37 + 42k$.
Un entier $x \in \mathbb{N}$ est une solution du système

$$\begin{cases} 3x &= 2 \pmod 5 \\ 5x &= 1 \pmod 6 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 29 + 30k$.

68. Équations du second degré dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Quel que soit l'anneau A dans lequel on calcule, on résout une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en commençant par l'écrire sous forme réduite :

$$(x-\alpha)^2 = \beta.$$

Il suffit pour cela que a soit inversible dans A puis que ba^{-1} soit factorisable par 2 dans A.
Il reste alors à trouver les éléments $y \in A$ tels que $y^2 = \beta$.
68.1 Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 = 1$ admet quatre solutions : ±1 et ±3.
68.2 Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 + 3x + 4 = 0$ devient sous forme réduite $(x+5)^2 = 0$. Elle admet 2 pour seule solution.
68.3 Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
L'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$ admet deux solutions : 1 et 2.
L'équation $x^2 - 3x = 1$ devient $(x+1)^2 = 2$ et n'a pas de solution.
68.4 Dans l'anneau $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, l'élément $\mathscr{C}(2)$ est inversible, d'inverse $\mathscr{C}(5)$; l'image de la fonction $[x \mapsto x^2]$ est constituée des éléments $\mathscr{C}(0)$, $\mathscr{C}(1)$, $\mathscr{C}(4)$ et $\mathscr{C}(7)$.
L'équation $x^2 + bx + c = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ si, et seulement si, son discriminant $b^2 - 4c$ est égal à 1, 4 ou 7.
68.5 Dans l'anneau $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

sont 6 et 9 ; les solutions du système

$$\begin{cases} x + y &= 4 \\ xy &= 10 \end{cases}$$

sont $(6,9)$ et $(9,6)$.

69. Nombres de Carmichael
Un entier $n \geqslant 2$ est un **nombre de Carmichael** lorsque

$$\forall\, a \in \mathbb{N}^*, \quad a^n = a \pmod n$$

sans être un nombre premier. →**[61]**
69.1 Rédiger une procédure en langage Python qui vérifie si un entier n donné est, ou non, un nombre de Carmichael.
69.2 On suppose qu'un nombre de Carmichael n admet un facteur carré : il existe donc deux entiers p et m tels que $n = p^2m$. Avec $a = 1 + pm$, on obtient

$$a^n = 1 \pmod n = 1 + pm \pmod n,$$

ce qui est absurde : les nombres de Carmichael n'admettent pas de facteur carré.

70. Exemples et contre-exemples de groupes cycliques
1.a Les groupes $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \oplus)$ sont cycliques.
1.b Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ est engendré par $\mathscr{C}_7(3)$.
1.c Les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}_6$, $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
2. Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \oplus)$ n'est pas cyclique.
4. Les éléments du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont tous d'ordre inférieur à 2. Ce groupe n'est pas cyclique.
5. Le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique.

III

Applications de l'arithmétique modulaire

III.1 Indicatrice d'Euler

71. ✍ *L'**indicatrice d'Euler** (ou* Euler totient function*) est l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ qui, à tout entier $n \geqslant 1$, associe le nombre $\varphi(n)$ d'entiers $1 \leqslant k \leqslant n$ qui sont premiers à n.*

72.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ordre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est égal à $\varphi(n)$.
72.2

$$\forall\, x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \quad x^{\varphi(n)} = 1$$

72.3 ➙ **Théorème d'Euler**

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad x \wedge n = 1 \Rightarrow x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

72.4 Le théorème d'Euler **[72.3]** est une généralisation du petit théorème de Fermat **[61]**.

73. Expression de l'indicatrice d'Euler
73.1 Si p est premier, alors $\varphi(p) = p - 1$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad x^p = x$$

soit

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad x^p \equiv x \pmod p.$$

73.2 Si p est premier et si α est un entier supérieur à 2, alors

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1).$$

73.3 L'indicatrice d'Euler est une **fonction multiplicative** :

$$\forall\, (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \qquad m \wedge n = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

73.4 ➙ *Connaissant la décomposition en produit de facteurs premiers*

$$n = \prod_{k=1}^{q} p_k^{m_k}$$

(où les nombres premiers p_k sont deux à deux distincts et les multiplicités m_k sont strictement positives), on en déduit que :

$$\varphi(n) = \prod_{k=1}^{q} p_k^{m_k-1}(p_k - 1).$$

74. Utilisation
Pour calculer les deux dernières décimales de 3^{1789}, il suffit de savoir que $\varphi(100) = 40$, mais il vaut mieux remarquer que $3^{20} = 1 \pmod{100}$.
Pour calculer les deux dernières décimales de 4^{2021}, la connaissance de $\varphi(100)$ est inutile. On aboutit au résultat avec la relation :

$$\forall\ (k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad 4^{10k+r} = 4^r \pmod{100}.$$

Entraînement

75. Le code Python suivant permet de calculer les valeurs de la fonction d'Euler.

```
def phi(n):
  liste = [0]+[1]*(n-1)
  for k in range(2, n//2+1):
    if n%k==0:
      for j in range(1, (n-1)//k+1):
        liste[j*k] = 0
  return sum(liste)
```

76. Soient $n \geqslant 1$, un entier et D_n, l'ensemble des entiers naturels qui divisent n.
76.1 Pour tout entier $d \in D_n$, on pose

$$A_d = \{1 \leqslant k \leqslant n\ :\ n \wedge k = d\}.$$

Le cardinal de A_d est égal à $\varphi(n/d)$ et

$$\{1,\dots,n\} = \bigsqcup_{d\in D_n} A_d.$$

76.2 L'application $[d \mapsto n/d]$ est une bijection de D_n sur D_n, donc

$$\sum_{d\in D_n} \varphi(d) = \sum_{d\in D_n} \varphi(n/d) = n.$$

77. Point de vue probabiliste
Soit $n \geqslant 2$, un entier. L'ensemble $\Omega = \{1,\dots,n\}$ est muni de la mesure de probabilité uniforme :

$$\forall\ k \in \Omega, \qquad \mathsf{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

77.1 Pour tout diviseur d de n, on note M_d, l'ensemble des multiples de d qui appartiennent à Ω. La probabilité $Q(M_d)$ est égale à $1/d$.
77.2 On considère la décomposition de n en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k}$$

où les α_k sont des entiers naturels non nuls.
1. Comme

$$M_{p_1} \cap \cdots \cap M_{p_r} = M_{p_1\cdots p_r}$$

pour tout $1 \leqslant r \leqslant s$, les événements M_{p_k} sont indépendants pour la mesure de probabilité Q.
2. L'ensemble des entiers de Ω qui sont premiers avec n est égal à

$$\bigcap_{k=1}^{s} M_{p_k}^c.$$

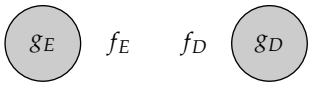
On retrouve ainsi l'expression de $\varphi(n)$ en fonction des facteurs premiers de n.

III.2 Éléments de cryptographie

78. *Crypter* un message M, c'est lui appliquer une transformation f pour transmettre le message $M' = f(M)$; *décrypter* le message transmis, c'est lui appliquer la bijection réciproque g de f pour obtenir $M = g(M')$.
79. Les méthodes les plus anciennes de cryptage supposaient que les deux fonctions f et g étaient connues seulement de l'expéditeur et du destinataire de M. Il fallait donc pouvoir transmettre un message ultra-secret (les deux fonctions f et g) avant de transmettre des messages secrets.
La cryptographie par clé publique est assez récente (Diffie & Hellmann, 1976) et plus subtile.

Cryptographie à clés publiques

80. Tout d'abord, on doit choisir la fonction de cryptage f pour que la connaissance de f ne permette pas *dans la pratique* de trouver la fonction de décryptage g. La fonction f peut alors être publiée (sur le site internet de son possesseur) sans que personne puisse en déduire la fonction g. La fonction f est la **clé publique** *a priori* connue de tous ; la fonction g est la **clé privée** et ne reste connue que d'une seule personne.
81. Ensuite, l'expéditeur E d'un message M et son destinataire D doivent chacun disposer d'un couple de fonctions de cryptage et décryptage : (f_E, g_E) et (f_D, g_D).



Les clés privées (sur fond gris) ne sont connues que de leurs propriétaires respectifs. Les clés publiques sont connues de tous.
81.1 L'expéditeur du message M dispose alors de sa clé privée g_E et des deux clés publiques f_E et f_D, ce qui lui permet d'envoyer le message chiffré

$$M' = f_D \circ g_E(M).$$

81.2 Le destinataire du message chiffré dispose de sa clé privée g_D et des deux clés publiques f_D et f_E : il reçoit M' et peut donc en déduire le message original, puisque

$$M = f_E \circ g_D(M').$$

81.3 Seul le destinataire dispose de g_D et peut donc décoder M'. Le message ainsi transmis reste donc secret, car illisible par un tiers.
81.4 Seul l'expéditeur dispose de g_E et peut donc composer le message chiffré M'. Le message transmis est donc authentifié, car non modifiable par un tiers.

Le système RSA

82. Soient p et q, deux nombres premiers distincts. On pose

$$n = pq$$

et on choisit deux entiers r et s tels que

$$rs \equiv 1 \mod \varphi(n).$$

82.1 L'entier $\varphi(n)$ est égal à $(p-1)(q-1)$ et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $rs = k(p-1)(q-1)+1$ et

$$\begin{aligned}\forall\ x \in \mathbb{Z}, \quad x^{rs} &\equiv x \pmod{p}\\ &\equiv x \pmod{q}.\end{aligned}$$

82.2 Les applications

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définies par

$$\forall\ u \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad f(u) = u^r \quad \text{et} \quad g(u) = u^s$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

83. Considérations pratiques [82]
Le couple (n,r) est public, ce qui permet à chacun de calculer facilement $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
Pour déterminer la bijection réciproque g, il faut connaître le couple (n,s) et il suffit pour cela de savoir expliciter la factorisation $n = pq$. C'est évidemment possible en théorie, mais les entiers p et q ayant chacun un très grand nombre de décimales, le calcul de la factorisation est trop long pour aboutir dans un délai raisonnable en pratique.
Ce système de cryptographie est dû à Rivest, Shamir & Adelman (1978).

IV

Résolution de l'équation de Bézout

84. L'algorithme d'Euclide permet de calculer un pgcd $d \in A$ de deux éléments a et b de A et, par définition du pgcd, l'équation de Bézout

$$au + bv = d \tag{2}$$

admet des solutions $(u,v) \in A \times A$. Comment calculer ces solutions ?

85. Réduction du problème
Il existe α et β tels que $a = d\alpha$ et $b = d\beta$ et :

$$au + bv = d \iff \alpha u + \beta v = 1.$$

Il suffit donc de savoir trouver les solutions $(u,v) \in A \times A$ de l'équation de Bézout lorsque a et b sont premiers entre eux :

$$au + bv = 1. \tag{3}$$

86. Solution générale
Le principe de superposition s'applique à l'équation de Bézout : Si (u_0,v_0) est une solution particulière de (3), alors (u,v) est une solution de (3) si, et seulement si,

$$\exists\, k \in A, \quad (u,v) = (u_0,v_0) + k(-b,a).$$

Solution minimale

87. On cherche une solution de (3) qui soit, en un certain sens, aussi petite que possible.

88. Cas de $\mathbb{K}[X]$
Soient a et b, deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg a \geqslant 1$ et que $\deg b \geqslant 1$.

1. Si q est le quotient de la division euclidienne de u_0 par b, alors $(u_1,v_1) = (u_0 - qb, v_0 + qa)$ est une solution de (3) telle que
$$\deg a - \deg v_1 = \deg b - \deg u_1 > 0.$$
et $-q$ est le quotient de la division euclidienne de v_0 par a.
2. Pour toute autre solution (u,v) de (3),
$$\deg u > \deg u_1 \quad \text{et} \quad \deg v > \deg v_1.$$

89. Cas de $\mathbb{Z}$
Soient a et b, deux entiers naturels supérieurs à 2, qu'on suppose premiers entre eux.

1. Il existe deux solutions (u_1,v_1) et (u_2,v_2) de (3) telles que $-b < u_2 < 0 < u_1 < b$ et $-a < v_1 < 0 < v_2 < a$.
2. Il existe une solution $(u_0,v_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation (3) telle que
$$|u| + |v| \geqslant |u_0| + |v_0|$$
pour toute autre solution (u,v) de (3).

Algorithme de Blankinship

90. L'algorithme d'Euclide classique permet de calculer un pgcd de deux éléments, puis d'en déduire un ppcm et (plus laborieusement) une solution particulière de l'équation de Bézout. Nous allons exposer un algorithme qui permet de calculer *simultanément* un pgcd *et* un ppcm de deux éléments a et b de A ainsi qu'une solution particulière de l'équation de Bézout. (W.A. Blankinship, *A new version of the euclidean algorithm*, American Mathematical Monthly, 1963, pp.742–745)

90.1 Pour tout entier n compris entre 0 et un rang N à déterminer, nous allons définir une matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & a_n \\ \gamma_n & \delta_n & b_n \end{pmatrix}$$

à coefficients dans l'anneau A.

90.2 Initialisation
Soient a et b dans A. On pose

$$X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

de telle sorte que la matrice colonne M_0X_0 est nulle.

90.3 Itération
Si la matrice M_n est connue, alors :

1. Ou bien $b_n = 0$, et la procédure est achevée $(N = n)$;
2. Ou bien $b_n \neq 0$ et dans ce cas,

2.a on effectue la division euclidienne de a_n par b_n :
$$a_n = q_n b_n + r_n$$

2.b on effectue sur M_n les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - q_n L_1$ puis $L_1 \leftrightarrow L_2$, c'est-à-dire
$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_n.$$

En particulier, $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = r_n$.

90.4 Conclusion
À la fin de la procédure, la matrice M_N est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_N & \beta_N & a_N \\ \gamma_N & \delta_N & 0 \end{pmatrix}$$

où a_N est un pgcd de a et b ; où (α_N, β_N) est une solution de l'équation de Bézout :

$$\alpha_N a + \beta_N b = a_N$$

et où $a\gamma_N = -b\delta_N$ est un ppcm de a et b.

91. Terminaison de l'algorithme
La famille de terme général $|b_n|$ (pour $A = \mathbb{Z}$) ou $\deg b_n$ (pour $A = \mathbb{K}[X]$) est une famille strictement décroissante d'entiers naturels.

92. Preuve de l'algorithme

1. Pour tout $0 \leqslant n < N$,
$$a_{n+1} \wedge b_{n+1} = a_n \wedge b_n$$
et en particulier
$$a_N = a_N \wedge b_N = a_0 \wedge b_0 = a \wedge b.$$

2.a Pour tout $0 \leqslant n \leqslant N$,
$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} M_0 \quad \text{et} \quad \alpha_n\delta_n - \beta_n\gamma_n = (-1)^n$$
et la matrice colonne M_nX_0 est nulle.

2.b La première ligne de la relation $M_NX_0 = 0$ donne une solution particulière de l'équation de Bézout.

2.c La deuxième ligne de la relation $M_NX_0 = 0$ donne
$$(a\gamma_N)d = (-b\delta_N)d = -ab(\alpha_N\delta_N - \beta_N\gamma_N),$$
donc $m = a\gamma_N = -b\delta_N$ est un ppcm de a et b.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

93. Exemples et contre-exemples

1. Exemples d'éléments nilpotents :

1.a dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$;

1.b dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

2. Exemple de polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ admettant deux factorisations différentes.

94. Méthodes

1. Comment calculer facilement $\mathscr{C}(a^m)$?

2. Comment résoudre une équation polynomiale dont l'inconnue appartient à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

3. Comment factoriser un polynôme dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

4. *Suite de* **[89]** –

4.a Comment programmer le calcul de (u_0, v_0) ?

4.b Comment vérifier expérimentalement l'unicité de la solution (u_0, v_0) ?

95. Questions pour réfléchir

1. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Si $D \in \mathbb{R}[X]$ est un pgcd de P et Q considérés comme des éléments de $\mathbb{R}[X]$, alors D est aussi un pgcd de P et Q considérés comme des éléments de $\mathbb{C}[X]$.

2. Discuter l'existence du pgcd d'une famille infinie d'éléments de A.

3. Discuter l'existence du ppcm d'une famille infinie d'éléments de A.

4. Relier la propriété **[25.2]** :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{P_k}$$

à l'existence d'une **décomposition en éléments simples** pour la fraction rationnelle $1/P$.

5. Discuter l'intérêt pratique des formules **[33]**.

6. *Suite de* **[90]** – Généraliser l'algorithme pour calculer le pgcd d'une famille finie d'éléments de A.

96. Soit $n \geqslant 1$, un entier. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note r_k, le reste de la division euclidienne de n par k.

96.1 Le reste r_k est supérieur à $k/2$ si, et seulement si, il existe un entier $1 \leqslant q \leqslant n$ tel que

$$(2q+1)k \leqslant 2n < (2q+2)k.$$

96.2 Comme le nombre d'entiers compris entre deux réels a et b est compris entre $(b-a)-1$ et $(b-a)+1$, la proportion

$$\frac{\#\{1 \leqslant k \leqslant n \,:\, r_k \geqslant k/2\}}{n}$$

tend vers **[4.58.1]**

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(2q+1)(q+1)} = 2\,\ell\mathrm{n}\,2 - 1.$$

Approfondissement

97. Code Python

Écrire des fonctions en langage Python qui effectuent les opérations suivantes.

97.1 Factoriser un entier $n \geqslant 1$ en produit de facteurs premiers. La factorisation

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

sera représentée par une liste de listes $\big((p_i, \alpha_i)\big)_{0 \leqslant i < r}$.

97.2 Comment utiliser cette factorisation pour vérifier qu'un entier est premier ? Cette méthode est-elle efficace ?

97.3 Comment utiliser cette factorisation pour vérifier qu'un entier est un carré parfait ?

97.4 Comment factoriser simultanément deux entiers m et n comme au **[37]** ?

98. Factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$

1. Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Q}$, une racine de P représentée sous forme irréductible par $r = p/q$. L'entier p divise a_0 et l'entier q divise a_n. La différence $q - p$ divise $P(1)$ et la somme $q + p$ divise $P(-1)$.

2. Comment programmer le calcul de *toutes* les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients *rationnels* ?

3. Comment obtenir la factorisation suivante ?

$$29X^3 - 175X^2 + 267X - 9 = (X-3)^3(29X-1)$$

4. Le polynôme $Q = 3X^3 - 19X^2 + 33X + 9$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

99. Factorisations dans $\mathbb{Z}$

On démontre qu'un entier est composé **[6.70.1]** en le factorisant sous la forme d'un produit de deux entiers supérieurs à 2.

99.1 *Suite de* **[98]** – Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'entier $n^4 - n + 16$ est composé.

99.2 L'entier $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 - n^4$ est composé pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

99.3 Série géométrique

1. Pour tout entier $a \geqslant 3$ et tout entier $n \geqslant 2$, l'entier $a^n - 1$ est composé.

2. Si $a \geqslant 2$ et si n n'est pas premier, alors il existe deux entiers $b \geqslant 4$ et $p \geqslant 2$ tels que

$$a^n - 1 = (b-1)\sum_{k=0}^{p-1} b^k$$

et $(a^n - 1)$ n'est pas premier.

3. Soit $a \geqslant 2$.

3.a Si n est divisible par un entier *impair*, alors il existe deux entiers $b \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$ tels que

$$a^n + 1 = (b+1)\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k-1} b^k.$$

3.b Si $a^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^n.$$

4.a Si n est divisible par 3, alors U_{n-1} est divisible par 3.

4.b Si p est un nombre premier distinct de 2, 3 et 5, alors p divise $10^{p-1} - 1$ et U_{p-2}.

99.4 Nombres de Mersenne

Si l'entier $a^p - 1$ est premier avec $a \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$, alors $a = 2$ et p est premier.

La réciproque est fausse, puisque $2^{11} - 1 = 23 \times 89$.

100. Triplets pythagoriciens

On étudie les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{4}$$

100.1 Analyse

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, une solution de (4).

1. Les pgcd $x \wedge y$, $y \wedge z$ et $z \wedge x$ sont égaux **[37]**.

2. On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux.

2.a Les entiers x et y sont de parités différentes : l'un est pair, l'autre est impair.

2.b On suppose que x est pair et que y est impair :

$$\exists\ (m,n,q) \in \mathbb{N}^3, \quad x = 2m, \quad y = 2n+1, \quad z = 2q+1.$$

Alors

$$m^2 = (n+q+1)(q-n)$$

et les facteurs $n+q+1$ et $q-n$ sont premiers entre eux, donc il existe **[24]** deux entiers k et ℓ, premiers entre eux, tels que

$$n+q+1 = \pm k^2 \quad \text{et} \quad q-n = \pm \ell^2.$$

100.2 Synthèse
Le triplet $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ est solution de (4) si, et seulement si, il existe deux entiers $0 \leqslant k < \ell$ premiers entre eux tels que

$$(x,y,z) = (2k\ell,\ \ell^2-k^2,\ \ell^2+k^2).$$

101. Soient m et n, deux entiers naturels non nuls.
1. Si la division euclidienne de m par n s'écrit $m = qn+r$ avec $q \geqslant 2$, alors

$$X^m - 1 = X^r(X^n-1)(X^{(q-1)n} + \cdots + X^n + 1) + (X^r - 1).$$

Que devient cette relation pour $q = 1$ et $q = 0$?
2. Le pgcd de (X^m-1) et de (X^n-1) est égal au pgcd de (X^n-1) et de (X^r-1).
3. Le pgcd de (X^m-1) et de (X^n-1) est égal à $(X^{m\wedge n}-1)$.

102. Points entiers d'une hyperbole
1. Soit p, un nombre premier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le pgcd de n et de $(n-p)$ est égal à 1 ou à p.
2. Les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ qui appartiennent à l'hyperbole $[xy = 2x+3y]$ sont :

$$(-3,1),(0,0),(1,-1),(2,-4),(4,8),(5,5),(6,4),(9,3).$$

3. Les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ qui appartiennent à l'hyperbole $[xy = 5x+5y]$ sont :

$$(-20,4),(0,0),(4,-20),(6,30),(10,10),(30,6).$$

4. Si $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ est un point de l'hyperbole

$$\mathscr{H} = [x^2 - y^2 - 4x - 2y = 7]$$

alors $(x+y-1)(x-y-3) = 10$.
Comme $(x+y-1)$ et $(x-y-3)$ ont même parité, l'hyperbole $\mathscr{H}$ ne rencontre pas $\mathbb{Z}^2$.

103.1 Le couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ est une solution de

$$\begin{cases} x \wedge y &= 5 \\ x \vee y &= 60 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe un couple (α,β) tel que

$$(x,y) = (5\alpha, 5\beta) \quad \text{et} \quad \{\alpha,\beta\} = \{1,12\} \quad \text{ou} \quad \{3,4\}.$$

103.2 Le couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ est une solution de

$$\begin{cases} x+y &= 100 \\ x \wedge y &= 10 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe un couple (α,β) tel que

$$(x,y) = (10\alpha, 10\beta) \quad \text{et} \quad \{\alpha,\beta\} = \{1,9\} \quad \text{ou} \quad \{3,7\}.$$

103.3 Le couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ est une solution de

$$\begin{cases} 11x - 5y &= 10 \\ x \wedge y &= 10 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$(x,y) = (10\alpha, 10\beta) \quad \text{où} \quad (\alpha,\beta) = (1+5k, 2+11k).$$

104. Théorème de Wilson
Le théorème de Wilson est une caractérisation, peu utile, des entiers premiers.
104.1 Soit p, un nombre premier.
1. Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Si $p \geqslant 3$, il y a $(p-3)$ éléments inversibles et distincts de leur inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
104.2 Soit n, un nombre composé. Il existe donc deux entiers p et q tels que $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant n-1$ et que $n = pq$.
3. Si $p < q$, alors $(n-1)! = 0 \pmod n$.
4. Si $3 \leqslant p = q$, alors $2 \leqslant p < 2p \leqslant n-1$ et $(n-1)!$ est un multiple de n.
104.3↦ *Un entier $n \geqslant 2$ est premier si, et seulement si,*

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod n.$$

105. Soient a, b et c, trois entiers compris entre 0 et 4, l'entier a étant non nul. On suppose qu'un entier N s'écrit $abc0$ en base 5 et abc en base 12 :

$$N = 5^3a + 5^2b + 5c = 12^2a + 12b + c.$$

Déterminer a, b, c et N en raisonnant dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

106. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, une fonction non identiquement nulle telle que

$$\forall\ p \in \mathbb{Z}, \quad f(2p) = 0 \quad \text{et} \quad f(p+4) = f(p)$$

et que

$$\forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(pq) = f(p)f(q).$$

Que vaut $f(1)$? Que vaut $f(3)$? En déduire les valeurs de $f(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

107. Théorème de Lagrange [6.27.2] dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}$. On note $d \in \mathbb{N}^*$, le pgcd de n et x.
1. Il existe $\delta \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}$, premiers entre eux, tels que $n = d\delta$ et $x = d\xi$. L'entier n divise δx.
2. Si n divise kx, alors il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $kx = n\ell$ et $k\xi = \ell\delta$. L'entier δ divise k.
3. L'ordre de $\mathscr{C}(x)$ est égal à δ.

108. Si l'entier n admet $p_1^{\alpha_1} \cdots p_q^{\alpha_q}$ pour décomposition en produit de facteurs premiers, alors l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit

$$\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_q^{\alpha_q}\mathbb{Z}.$$

Relier cette factorisation au théorème **[58]**.

109. Comparaison de groupes
On compare ici les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$.
109.1 On pose $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les images du morphisme $[x \mapsto 2x]$ en tant qu'application $G \to G$ et en tant qu'application $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes, donc les groupes G et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
109.2 L'addition dans le groupe produit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est définie par la table suivante.

$\oplus$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(0,2)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(0,0)$
$(0,2)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$

L'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ \mathscr{C}_6(n) &\mapsto \big(n\mathscr{C}_2(1),\ n\mathscr{C}_3(1)\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Pour aller plus loin

110. Questions pour réfléchir

1. Mettre au point un algorithme qui calcule les tables **[56]** et **[109]**.
2. Un anneau intègre contient-il un élément nilpotent ? Et un anneau qui n'est pas intègre ?
3. *Suite de* **[16.1]** – Condition sur les entiers a, b, c et d pour que les entiers $an+b$ et $cn+d$ soient premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

111. Théorèmes de factorisation

Pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on note $\mathscr{C}$, le morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. **[45.2]**

111.1 Si $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$ est un morphisme de groupes, alors l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ définie par $\varphi = \psi \circ \mathscr{C}$ est un morphisme de groupes dont le noyau contient $n\mathbb{Z}$.

111.2 Premier théorème

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to G$, un morphisme de groupes.
Si $n\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\varphi$, alors il existe un, et un seul, morphisme de groupes

$$\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to G$$

tel que $\varphi = \psi \circ \mathscr{C}$.
De plus, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\psi$ et le morphisme ψ est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$.

111.3 Second théorème de factorisation

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to A$, un morphisme d'anneaux tel que $n\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Il existe un, et un seul, morphisme d'anneaux

$$\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$$

tel que $\varphi = \psi \circ \mathscr{C}$.

111.4 Chercher un analogue au théorème de factorisation **[111.3]** pour les morphismes d'anneaux définis sur $\mathbb{K}[X]$.

112. Caractéristique d'un corps

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$, un corps.

112.1 L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(k) = k \cdot 1_{\mathbb{K}}$$

est un morphisme d'anneaux.

112.2 Si $n = pq$ avec $1 < p \leqslant q < n$, alors il n'existe pas d'isomorphisme d'anneaux $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$.

112.3 *Suite de* **[111.3]** – Si φ n'est pas injectif, alors il existe un nombre premier p tel que $\operatorname{Ker}\varphi = p\mathbb{Z}$.

112.4 ✍ *Un corps $\mathbb{K}$ est un* ***corps de caractéristique nulle*** *lorsque le morphisme $[k \mapsto k \cdot 1_{\mathbb{K}}]$ est injectif.*

112.5 ✍ *Un corps $\mathbb{K}$ est un* ***corps de caractéristique*** *p lorsque le noyau du morphisme $[k \mapsto k \cdot 1_K]$ est égal à $p\mathbb{Z}$.*
Dans ce cas, l'entier p est premier.

112.6 Exemples

Les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(X)$, $\mathbb{R}(X)$, $\mathbb{C}(X)$ et

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

sont des corps de caractéristique nulle.
Les corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(X)$ ont pour caractéristique 2.

112.7 Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, alors il existe un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$.

113. Quotients de $\mathbb{R}[X]$

On transpose ici à l'anneau $\mathbb{R}[X]$ l'étude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

113.1 Exemples de calculs modulo P_0

Soient $A = X^{100} - X^4 + X - 1$ et $P_0 = X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^4 = 1 + P_1P_0$.
2. Il existe $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^{100} = 1 + P_2P_0$.
3. Le reste de la division euclidienne du polynôme A par P_0 est égal à $(X-1)$.

113.2 Généralisation

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme dont le degré est supérieur à 1. On pose

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \mathscr{C}(P) = \{P + P_0Q,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$$

et

$$\mathbb{R}[X]/\langle P_0\rangle = \{\mathscr{C}(P),\ P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

4. Définir une structure d'anneau sur $\mathbb{R}[X]/\langle P_0\rangle$ qui soit compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{R}[X]$.
5. Si $\deg P_0 = 1$, alors il existe un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{R}[X]/\langle P_0\rangle$ sur $\mathbb{R}$.
6. Si $P_0 = X^2 + 1$, alors il existe un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{R}[X]/\langle P_0\rangle$ sur $\mathbb{C}$.

114. Nombres de Fibonacci

La **suite de Fibonacci** est définie par la donnée de $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Comme

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

les entiers F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

2. Soit $m \geqslant 1$.

2.a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$$

2.b
$$\forall\, n \geqslant 1, \quad F_n \wedge F_{m+n} = F_n \wedge F_m$$

2.c Si r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad F_m \wedge F_n = F_n \wedge F_r.$$

2.d
$$\forall\, m \geqslant 1,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}.$$

115. Critère d'Eisenstein

Soit $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p qui divise a_0, a_1, …, a_{n-1} mais ne divise pas a_n et que p^2 ne divise pas a_0.

1. On suppose qu'il existe

$$B = \sum_{k=0}^{m_1} b_kX^k \in \mathbb{Z}[X], \qquad C = \sum_{k=0}^{m_2} c_kX^k \in \mathbb{Z}[X]$$

tels que $A = BC$, avec $m_1 < n$ et $m_2 < n$.

1.a Comme $a_0 = b_0c_0$, alors b_0 ou c_0 est divisible par p. Est-il possible que p divise b_0 et c_0 ?

1.b Si $p \mid b_0$, alors $p \mid b_k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant m_1$ et, en particulier, $p \mid a_n$.

2. Le polynôme A est irréductible en tant qu'élément de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$.
3. Le polynôme $X^5 - 12X^2 + 9X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible.

116. Quotient par un idéal maximal

Soit A, un anneau commutatif. Un idéal $I \subsetneq A$ est dit **maximal** lorsque le seul idéal J de A tel que

$$I \subsetneq J \subset A$$

est l'idéal $J = A$.

116.1 Les idéaux maximaux de $A = \mathbb{K}[X]$ sont les idéaux engendrés par un polynôme irréductible.
Les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont les idéaux engendrés par un nombre premier.

116.2 Soit I, un idéal de A. La **classe modulo** I de $x \in A$ est définie par

$$x + I = \{x + y,\ y \in I\}.$$

En particulier, l'idéal I est la classe de 0.
Le **quotient** de l'anneau A par un idéal I est l'ensemble $R = {}^{A}\!/_{I}$ des classes modulo I.

$${}^{A}\!/_{I} = \{x + I,\ x \in A\}$$

1. Étant donnés deux éléments u et v de R, il existe deux éléments x et y de A tels que

$$u = x + I \qquad \text{et} \qquad v = y + I.$$

1.a La somme $u \oplus v$ est bien définie par

$$u \oplus v = (x + y) + I.$$

L'élément I de R, classe de 0 modulo I, est neutre pour $\oplus$.

1.b Le produit $u \otimes v$ est bien défini par

$$u \otimes v = (x * y) + I.$$

L'élément $1 + I$ de R, classe de 1 modulo I, est neutre pour $\otimes$.

1.c Le quotient R est muni d'une structure d'anneau commutatif pour les opérations $\oplus$ et $\otimes$.

116.3 Soit $u = x + I \in R$, distinct de $0 + I$.

2. L'idéal de R engendré par u :

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= \{u \otimes v,\ v \in R\} \\ &= \{(x * y) + I,\ y \in A\}\end{aligned}$$

est un idéal de A qui contient I et $x \notin I$, donc $\langle u \rangle = A$.

3. Il existe $y \in A$ tel que la classe $y + I$ soit l'inverse de la classe u pour la multiplication $\otimes$.

4. L'anneau quotient $R = {}^{A}/_{I}$ est un corps. →**[58]**, **[113]**