Composition de Mathématiques

Le 15 septembre 2021 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Pour tout entier $p \geqslant 1$, *on pose*

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$, *on pose*

$$\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

Ce réel γ *est appelé* ***constante d'Euler***. *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on pose*

$$r_n = \gamma - \gamma_n.$$

2. Démontrer que

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

3. Démontrer que

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du.$$

En remarquant que

$$\int_0^1 u\, du = \frac{1}{2},$$

en déduire que

$$\frac{1}{2p(p+1)} \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2p^2}$$

puis que

$$\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\Big) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\Big)$$

pour tout entier $p \geqslant 2$ puis que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

4. Pour quelles valeurs de l'indice n le réel γ_n donne-t-il une approximation de γ à 10^{-8} près ?

Pour tout entier $n \geqslant 1$, *on pose*

$$\gamma_{n,1} = \gamma_n + \frac{1}{2(n+1)}.$$

5. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,1} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Pour quelles valeurs de l'indice n le réel $\gamma_{n,1}$ est-il une valeur approchée de γ à 10^{-8} près ?

❖ II – Problème ❖

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.
4. a. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

En déduire que la suite de terme général $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante.
4. b. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. a. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}.$$

5. b. En déduire un équivalent simple de $\binom{2p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

❖ III – Problème ❖

On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs ε_1, ε_2 et ε_3 de E définis par

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. a. Décrire le noyau de u.
2. b. Démontrer que l'image de u est un plan de $\mathbb{R}^3$. Donner une équation cartésienne de ce plan (relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
2. c. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. a. Résoudre l'équation

$$u(x, y, z) = -(x, y, z)$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. b. Exprimer $u(\varepsilon_3)$ en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3.
3. c. Calculer $u^n(\varepsilon_1)$, $u^n(\varepsilon_2)$ et $u^n(\varepsilon_3)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. (On rappelle que $u^n = u \circ \cdots \circ u$ où u apparaît n fois.)
4. Calculer $P^{-1}AP$.
5. On considère les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \phantom{x_n - {}} 2y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = x_n - 5y_n - 4z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 7y_n + 6z_n \end{cases}$$

et la condition initiale :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -2, \quad z_0 = 3.$$

En reliant le vecteur (x_0, y_0, z_0) à ε_1, ε_2 et ε_3, calculer l'expression de x_n, y_n et z_n.

❖ IV – Problème ❖

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. a. Démontrer qu'il existe au plus un polynôme T_n appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta. \tag{1}$$

1. b. En remarquant que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

démontrer que le polynôme

$$T_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k} \tag{2}$$

vérifie la relation (1).

> *La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des **polynômes de Tchebychev de première espèce**.*

2. Calculer les polynômes T_0, T_1, T_2 et T_3.
3. Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \tag{3}$$

Déduire de cette relation le degré et le coefficient dominant de chaque polynôme T_n. Retrouver ces valeurs à l'aide de la relation (2).
4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n admet n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

> *Ces racines seront notées $(t_{n,k})_{0\leqslant k<n}$ avec*
>
> $$-1 < t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,n-1} < 1.$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme T_n est scindé à racines simples. Préciser la valeur des racines de T_n.
5. Démontrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant 3}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ à la base $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant 3}$.

> *La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **polynômes de Tchebychev de deuxième espèce** est définie par*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}. \tag{4}$$

6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme U_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que ses racines appartiennent toutes à l'intervalle $]-1, 1[$.
7. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < \theta < \pi, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{5}$$

Cette relation est-elle encore vraie pour $-\pi < \theta < 0$?
8. Déterminer les racines de U_n.
9. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence (3) que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

> *On note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$, le quotient et le reste de la division euclidienne de T_n par T_m.*

10. a. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \quad T_m.T_n = \frac{T_{n+m} + T_{n-m}}{2}.$$

10. b. On suppose que $2m \leqslant n < 3m$. Démontrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \quad \text{et} \quad R_{n,m} = -T_{n-2m}.$$

Solution I ❀ Constante d'Euler

1. Pour tout $0 < p \leqslant t \leqslant p+1$, on a

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{p}$$

et en intégrant sur l'intervalle $[p, p+1]$ de longueur 1, on en déduit que

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}$$

et donc que

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}. \tag{6}$$

❧ Comme

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)},$$

on en déduit que

$$u_p \underset{p \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{p^2}\Big)$$

et donc que la série $\sum u_p$ est convergente.

La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ des sommes partielles est donc convergente.

❧ En sommant les encadrements (6), on obtient plus précisément que

$$0 \leqslant \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ (somme télescopique). En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que la limite γ de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1.$$

2. Comme γ est la somme de la série $\sum u_p$ et que γ_n est la somme partielle de rang n de cette série, la différence

$$r_n = \gamma - \gamma_n$$

est (par définition) égale au reste de rang n de cette même série :

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

3. Pour tout $0 \leqslant u \leqslant 1$,

$$\frac{u}{p+u} = \frac{(p+u)-p}{p+u} = 1 - \frac{p}{p+u}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du &= 1 - p\int_0^1 \frac{du}{p+u} \\ &= 1 - p\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \qquad (t = p+u) \\ &= pu_p.\end{aligned}$$

❧ Soit $p \geqslant 2$. La fonction

$$\Big[u \mapsto \frac{1}{p+u}\Big]$$

est continue et décroissante, donc

$$\forall\, 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad \frac{u}{p+1} \leqslant \frac{u}{p+u} \leqslant \frac{u}{p}.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\frac{1}{2(p+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{u}{p+u}\, du \leqslant \frac{1}{2p}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2p(p+1)} \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2p^2}.$$

On remarque que

$$\frac{1}{2p(p+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\Big).$$

(C'est une décomposition en éléments simples !) Comme $p \geqslant 2$ (jusqu'ici, tout valait pour $p \geqslant 1$...), on a aussi

$$\frac{1}{2p^2} \leqslant \frac{1}{2(p-1)p} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\Big).$$

❧ On a ainsi encadré u_p par les termes généraux de deux séries télescopiques convergentes. On en déduit que (pour $N > n \geqslant 2$)

$$\sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\Big) \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\Big)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}\Big) \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} u_p \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\Big).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit enfin que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}. \tag{7}$$

4. Il suffit donc prendre n de l'ordre de 10^8 pour que r_n soit de l'ordre de 10^{-8}.

C'est un peu long, mais c'est surtout peu pratique (à cause des nombreuses erreurs d'arrondi).

5. Par définition,

$$\gamma - \gamma_{n,1} = r_n - \frac{1}{2(n+1)}$$

et d'après l'encadrement (7),

$$0 \leqslant \gamma - \gamma_{n,1} \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Ce nouvel encadrement nous dit qu'il suffit de prendre n de l'ordre de 10^4 pour obtenir que $\gamma_{n,1}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-8} près. Le gain en efficacité est considérable !

❦ *L'encadrement* (7) *nous dit que*

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Cet équivalent prouve que

$$\gamma - \left(\gamma_n + \frac{1}{2n}\right) = r_n - \frac{1}{2n} = o(r_n)$$

et donc que $\gamma_n + \frac{1}{2n}$ *est une bien meilleure approximation de* γ *que* γ_n.

❦ *L'énoncé a fait le choix de considérer une approximation* par excès *de* γ *(et non par défaut) en définissant* $\gamma_{n,1}$. *Le gain en efficacité est le même.*

Solution II ❀ Intégrales de Wallis

1. L'intégrale d'une fonction *continue* sur un *segment* est bien définie.

2. $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$.

3. Pour tout $0 < t < \pi/2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \sin^{n+1} t < \sin^n t.$$

L'intégrale conservant les inégalités, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et strictement positive, elle est donc convergente.

4. a. On intègre par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \sin t \, dt \\ &= \left[-\sin^{n+1} t \cos t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t \, dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

❧ D'après la relation de récurrence précédente,

$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1},$$

donc la suite de terme général $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et son premier terme est égal à $\pi/2$ d'après **2.**

4. b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive,

$$0 < \frac{n+1}{n+2}I_n = I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

On en déduit que le rapport I_{n+1}/I_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ On en déduit que

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_n^2$$

et donc que

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

puisque l'intégrale I_n est positive.

On rappelle qu'on peut composer un équivalent par $\sqrt{\cdot}$.

5. a. Les formules annoncées pour I_{2p} et I_{2p+1} sont vraies pour $p = 0$ d'après **2.** Supposons que, pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}.$$

Alors, d'après la relation de récurrence du **4.a.**,

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2}\cdot I_{2p} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)^2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}\cdot\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule pour I_{2p}, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, et de façon analogue,

$$\begin{aligned} I_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} \\ &= \frac{2^2(p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)(2p)!} \\ &= \frac{2^{2p+2}\big((p+1)!\big)^2}{(2p+3)(2p+2)!}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule pour I_{2p+1}, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. b. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p+1)\pi}{2.4^{2p}}\binom{2p}{p}^2$$

et, d'après **4.b.**, la suite de terme général I_{2p}/I_{2p+1} tend vers 1 lorsque p tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\binom{2p}{p} \sim \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}.$$

Cet équivalent sert en particulier à établir la formule de Stirling (équivalent de $n!$*).*

Solution III ❀ Réduction d'une matrice

1. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est représentée par la matrice P dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donc : c'est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, la matrice P est inversible.

En effectuant les deux opérations de pivot :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1, \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1,$$

puis une permutation des colonnes, on obtient

$$P \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme les opérations de pivot conservent le rang et que la dernière matrice est clairement inversible, on en déduit que P est inversible et (par conséquent) que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. a. On traduit l'équation $u(x, y, z) = (0, 0, 0)$ par le système $AX = 0$. La résolution de ce système montre que le noyau de u est une droite vectorielle :

$$\operatorname{Ker} u = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

2. b. On vient de voir que le noyau de u est une droite. D'après le Théorème du rang, le rang de u est égal à 2 (dimension de l'espace de départ *moins* dimension du noyau). L'image de u est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

L'image de A est engendrée par ses colonnes. Sur la matrice, on voit clairement que

$$C_1 + C_2 = C_3,$$

ce qui prouve que l'image de A est engendrée par les colonnes C_1 et $\frac{1}{2} \cdot C_3$ (par exemple). Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est égal à $(-1, 1, 1)$, donc

$$\operatorname{Im} u = [x - y - z = 0].$$

2. c. Le vecteur ε_2 ne vérifie pas l'équation cartésienne de $\operatorname{Im} u$. Or $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2$, donc

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}.$$

Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont donc en somme directe dans E. De plus, d'après le Théorème du rang,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u,$$

donc les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont bien supplémentaires dans E :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

3. a. L'équation $u(x, y, z) = -(x, y, z)$ se traduit par le système matriciel $(A + I_3)X = 0$. L'ensemble des solutions est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par ε_1.

3. b. On vérifie sans peine que $u(\varepsilon_3) = 2 \cdot \varepsilon_3$.

3. c. D'après les questions précédentes,

$$u(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1, \quad u(\varepsilon_2) = 0, \quad u(\varepsilon_3) = 2 \cdot \varepsilon_3.$$

On en déduit par récurrence que

$$u^n(\varepsilon_1) = (-1)^n \cdot \varepsilon_1, \quad u^n(\varepsilon_2) = 0, \quad u^n(\varepsilon_3) = 2^n \cdot \varepsilon_3$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

4. D'après la formule du changement de base, la matrice $P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. D'après la question précédente,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

‖ *Il est inutile de calculer* P^{-1} *!*

5. Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

et par récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base, il existe un, et un seul, triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x_0, y_0, z_0) = a \cdot \varepsilon_1 + b \cdot \varepsilon_2 + c \cdot \varepsilon_3.$$

On peut poser ce système et le résoudre (ce qui revient à inverser la matrice P) ou se contenter de faire preuve d'un peu flair pour obtenir :

$$(x_0, y_0, z_0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3.$$

Par linéarité de u^n, on en déduit que

$$\begin{aligned}(x_n, y_n, z_n) &= u^n(x_0, y_0, z_0) \\ &= u^n(\varepsilon_1) + u^n(\varepsilon_3) \\ &= (-1)^n \cdot \varepsilon_1 + 2^n \cdot \varepsilon_3 \\ &= \big(2^n,\ (-1)^{n+1} - 2^n,\ (-1)^n + 2^{n+1}\big).\end{aligned}$$

Solution IV ❀ Polynômes de Tchebychev

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons deux polynômes P et Q tels que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\cos\theta) = \cos n\theta = Q(\cos\theta).$$

En particulier,

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad (P - Q)(x) = 0.$$

Le polynôme $(P - Q)$ admettant une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul, donc $P = Q$.

L'unicité est ainsi démontrée.

1. b. D'après la Formule du binôme,

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n &= (\cos\theta + i \sin\theta)^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \cdot i^p \cdot \sin^p\theta. \end{aligned}$$

Pour tout entier p *impair*, le complexe i^p est un imaginaire pur. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \mathfrak{Re}(e^{in\theta}) \\ &= \sum_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \cdot i^p \sin^p\theta \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \cdot (-1)^k \cdot (\sin^2\theta)^k \\ & \qquad\qquad (p = 2k) \\ &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \cdot (\cos^2\theta - 1)^k \end{aligned}$$

car $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$.

D'après la question précédente, on sait qu'il existe *au plus un* polynôme T_n tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Cette égalité, vérifiée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, montre que le polynôme

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k}$$

possède la propriété qui caractérise T_n. Cela démontre qu'il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

2. On trouve $T_0 = 1$, $T_1 = X$ (un seul terme dans la somme) et

$$T_2 = \binom{2}{0}\cdot X^2 + \binom{2}{2}\cdot (X^2-1) = 2X^2 - 1$$
$$T_3 = \binom{3}{0}\cdot X^3 + \binom{3}{2}\cdot (X^2-1)X = 4X^3 - 3X.$$

3. On sait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(n+1)\theta\cdot\cos\theta = \cos(n+1+1)\theta + \cos(n+1-1)\theta$$

(formules d'addition) c'est-à-dire

$$2\cos\theta\cdot\ T_{n+1}(\cos\theta) = T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta).$$

Le polynôme

$$2XT_{n+1} - (T_{n+2} + T_n)$$

admet ainsi une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} + T_n.$$

> *Cette relation de récurrence permet de calculer les polynômes de Tchebychev plus aisément que l'expression* (2).
> *Les incrédules pourront vérifier mon affirmation en calculant T_4 et T_5 en utilisant les deux méthodes !*

❧ D'après **2.**, on a $\deg T_n = n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 3$ au moins et le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour $1 \leqslant n \leqslant 3$ (mais pas pour $n = 0$: le polynôme T_0 est unitaire).

HR : Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $\deg T_n = n$, $\deg T_{n-1} = n-1$ et que le coefficient dominant de T_n soit égal à 2^{n-1}.

D'après la relation de récurrence (3),

$$T_{n+1} = 2XT_n + T_{n-1}.$$

Or $\deg(2XT_n) = 1 + \deg T_n = n+1$ et comme $\deg T_{n-1} = n-1 < n+1$, on en déduit d'une part que

$$\deg T_{n+1} = n+1$$

et d'autre part que le coefficient dominant de T_{n+1} est celui de $2XT_n$, et donc égal à

$$2\cdot 1\cdot 2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}.$$

Notre hypothèse de récurrence, vraie pour $n = 2$, est donc héréditaire.

On a ainsi démontré que $\deg T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

❧ Dans l'expression (2) de T_n, chaque terme est un polynôme de degré

$$(2k) + (n-2k) = n$$

donc $\deg T_n \leqslant n$.

Le coefficient du terme en X^n est égal à

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p}.$$

Or $(1+1)^n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(1-1)^n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (mais pas pour $n = 0$!). On applique alors la Formule du binôme à ces deux expressions et on en déduit par sommation que

$$\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n\\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} = \frac{2^n + 0}{2} = 2^{n-1}$$

pour tout $n \geqslant 1$ (mais pas pour $n = 0$).

4. Tout d'abord, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\cos n\theta = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

D'autre part, pour $x \in \left]-1, 1\right[$, il existe un unique $\theta \in \left]0, \pi\right[$ tel que $x = \cos\theta$ et

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

On en déduit que, pour $|x| < 1$,

$$T_n(x) = 0 \iff x = \cos\Big(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\Big) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k < n,$$

cette contrainte sur $k \in \mathbb{Z}$ assurant que

$$0 < \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} < \pi.$$

Sur l'intervalle $\left]0, \pi\right[$, la fonction cos est strictement décroissante et donc injective. Aux n angles trouvés correspondent donc n racines distinctes de T_n.

❧ Comme $\deg T_n = n$, le polynôme T_n admet au plus n racines distinctes. On a donc trouvé toutes les racines de T_n, elles appartiennent toutes à l'intervalle $\left]0, \pi\right[$ et ce sont toutes des racines simples (multiplicité = 1).

Le polynôme T_n est donc scindé à racines simples et ses racines sont

$$t_{n,k} = \cos\Big(\frac{\pi}{2n} + \frac{(n-k-1)\pi}{n}\Big)$$

pour $0 \leqslant k < n$.

5. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant 3$, on a

$$\deg T_k = k.$$

La famille $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant 3}$ est donc une famille *libre* (échelonnée en degré) de quatre vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel de dimension quatre : c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

D'après **2.**, la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Comme T_{n+1} est un polynôme et que

$$\deg T_{n+1} = n+1 \geqslant 1,$$

alors U_n est aussi un polynôme et

$$\deg U_n = (n+1) - 1 = n.$$

On sait que les racines de T_{n+1} vérifient

$$-1 < t_{n+1,0} < t_{n+1,1} < \cdots < t_{n+1,n} < 1.$$

Pour tout entier $0 \leqslant k < n$, la fonction canoniquement associée au polynôme T_{n+1} est continue sur le segment $[t_{n+1,k}, t_{n+1,k+1}]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]t_{n+1,k}, t_{n+1,k+1}[$ et prend la même valeur (égale à 0...) aux deux extrémités de cet intervalle. D'après le Théorème de Rolle, il existe un réel

$$t_{n+1,k} < u_{n,k} < t_{n+1,k+1}$$

tel que $U_n(u_{n,k}) = T'_{n+1}(u_{n,k}) = 0$.

Ainsi, U_n est un polynôme de degré n qui admet au moins une racine dans chacun des n intervalles et comme ces n intervalles sont deux à deux disjoints, U_n admet au moins n racines distinctes :

$$-1 < u_{n,0} < u_{n,1} < \cdots < u_{n,n-1} < 1.$$

Comme plus haut pour T_n, on en déduit que le polynôme U_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont réelles et se trouvent dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta.$$

En dérivant cette expression, on obtient

$$(-\sin\theta)\cdot T'_{n+1}(\cos\theta) = -(n+1)\sin(n+1)\theta$$

et donc

$$\forall\, 0 < \theta < \pi, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

puisque $\sin\theta \neq 0$ sur $]0,\pi[$.

❧ Les deux expressions sont des fonctions *paires* de θ : l'expression de gauche parce que cos est une fonction paire ; l'expression de droite en tant que quotient de deux fonctions impaires (règle des signes).

Par conséquent, l'égalité établie sur $]0,\pi[$ est automatiquement vraie sur l'intervalle symétrique $]-\pi,0[$.

8. Par **6.**, on sait que les racines de U_n appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$. On raisonne alors comme au **4.** avec

$$x \in]-1,1[\iff \theta = \operatorname{Arccos} x \in]0,\pi[.$$

On a :

$$\begin{aligned} U_n(x) = 0 &\iff \sin(n+1)\theta = 0 \\ &\iff \exists\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \theta = \frac{k\pi}{n+1} \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{car } 0 < \theta < \pi) \\ &\iff \exists\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x = \cos\frac{k\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme la fonction cos est injective sur $]0,\pi[$, on a ainsi trouvé n racines distinctes de U_n dans l'intervalle $]-1,1[$ et, d'après **6.**, on a trouvé toutes les racines de U_n.

9. Soit $0 < \theta < \pi$. D'après (5),

$$\begin{aligned} U_{n+2}(\cos\theta) + U_n(\cos\theta) &= \frac{\sin(n+3)\theta + \sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(n+2+1)\theta + \sin(n+2-1)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{2\sin(n+2)\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= 2\cos\theta\cdot U_{n+1}(\cos\theta). \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement qu'au **1.a.** ou au **3.**, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n.$$

10. a. On procède comme au **2.** avec les formules d'addition :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta = 2\cos m\theta\cos n\theta.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$$

et donc que le polynôme

$$2T_mT_n - (T_{n+m} + T_{n-m})$$

est nul puisqu'il admet une infinité de racines distinctes.

10. b. Comme $n \geqslant 2m$, on peut remplacer n par

$$n - m \geqslant m$$

dans le résultat précédent :

$$2T_mT_{n-m} = T_n + T_{(n-m)-m}$$

ce qui nous donne

$$T_n = (2T_{n-m})T_m + (-T_{n-2m}).$$

Et comme $n < 3m$, on a aussi

$$\deg T_{n-2m} = n - 2m < m = \deg T_m$$

(= le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur). Le Théorème sur la division euclidienne nous assure alors que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \quad \text{et} \quad R_{n,m} = -T_{n-2m}.$$