Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2021/2022

MP

Composition de Mathématiques

Le 6 octobre 2021 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On note ici $\mathbb{N}^{**}$, l'ensemble des entiers supérieurs à 2 :

$$\mathbb{N}^{**} = \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}.$$

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^{**}, \quad \zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}.$$

1. Par comparaison avec une intégrale, démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$$

puis que la série

$$\sum \frac{\zeta(n)-1}{n}$$

est absolument convergente.

On pose maintenant $I = \mathbb{N}^{**} \times \mathbb{N}^{**}$ et

$$\forall\, (k,n) \in I, \quad x_{k,n} = \frac{1}{nk^n}.$$

3. Démontrer que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.
☞ *On pourra considérer la partition*

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^{**}} I_n$$

où $I_n = \big\{(k,n) \in I,\ k \in \mathbb{N}^{**}\big\}$.

4. La famille de terme général

$$\forall\, (k,n) \in I, \quad y_{k,n} = \frac{\cos(kn)}{nk^n}$$

est-elle sommable ?

❖ II – Problème ❖

On note E, l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \big|f(x)\big|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n, le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de degré inférieur à n de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. (On confondra les applications polynomiales *et les* polynômes.*)*

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. On établit dans cette question l'existence et l'unicité des polynômes de Tchebychev.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer un polynôme T_n, à coefficients réels, de degré n, tel que

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta). \tag{1}$$

☞ *On pourra remarquer que $\cos n\theta$ est la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.*

1. b. Démontrer qu'il n'existe qu'un seul polynôme T_n vérifiant la propriété (1) : on l'appelle **le n-ième polynôme de Tchebychev (de première espèce)**.

2. Vérifier que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x). \tag{2}$$

Cette identité est-elle vraie sur $\mathbb{R}$?

3. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

☞ *On pourra calculer $T_n(x) + T_{n+2}(x)$.*

3. b. Expliciter les polynômes T_0, T_1, T_2 et T_3.

3. c. Calculer le coefficient dominant de T_n.

4. Dans cette question, on détermine les racines et les extrema du polynôme T_n pour $n \geqslant 1$. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad \text{et} \quad c_k = \cos\frac{k\pi}{n}.$$

Les réels c_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont appelés les ***points de Tchebychev****.*

4. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\theta_k).$$

4. b. Calculer $\|T_n\|_\infty$, puis démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|T_n(c_k)\right| = \|T_n\|_\infty$$

et que

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).$$

4. c. Dessiner le graphe de T_3 et préciser les réels c_0, c_1, c_2 et c_3 sur la figure.

Partie B. Polynôme de meilleure approximation quadratique

Nous allons maintenant définir une norme euclidienne sur E.

5. a. Démontrer que, pour tout $h \in E$, l'intégrale

$$\int_0^\pi h(\cos t)\,dt$$

existe.

5. b. Soit $h \in E$, une fonction *positive* telle que

$$\int_0^\pi h(\cos t)\,dt = 0.$$

Démontrer que h est la fonction nulle.

5. c. Démontrer que l'application

$$(f,g) \mapsto \langle\, f \mid g\,\rangle = \int_0^\pi f(\cos t)g(\cos t)\,dt$$

est un produit scalaire sur E.

> *On notera $\|\cdot\|_2$, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.*

6. Calculer $\langle\, T_m \mid T_n\,\rangle$ en discutant sur les valeurs de m et n. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$(T_0, T_1, \dots, T_n)$$

est une base orthogonale de E_n.

> *Dans la suite de cette partie, f est un élément fixé de E ; n est un entier naturel donné. On pose*
>
> $$d_2(f, E_n) = \inf_{Q\in E_n}\|f-Q\|_2$$
>
> *ainsi que*
>
> $$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle\, T_k \mid f\,\rangle}{\|T_k\|_2^2}\cdot T_k.$$

7. Justifier l'existence du réel $d_2(f, E_n)$.

8. Justifier que $t_n(f) \in E_n$ et calculer $\left\|t_n(f)\right\|_2^2$.

9. Démontrer que $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n, c'est-à-dire

$$\forall\, g \in E_n, \quad \left\langle\, f - t_n(f) \,\middle|\, g\,\right\rangle = 0.$$

10. En déduire que la série

$$\sum \frac{\langle\, f \mid T_k\,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

est convergente.

11. Démontrer que

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle\, f \mid T_k\,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

> *On peut démontrer que*
>
> $$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle\, f \mid T_k\,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}.$$

❖ III – Problème ❖

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 en décroissant. On suppose de plus que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

La série alternée $\sum(-1)^n u_n$ est donc convergente et on étudie ici son reste :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k.$$

1. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$$

2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(u_{n+p} - u_{n+p+1}).$$

En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$$

4. En déduire que

$$R_n \sim (-1)^n\frac{u_n}{2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Application : déterminer un équivalent de

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution I ❀ Deux familles sommables

1. La fonction
$$\left[t \mapsto \frac{1}{t^n}\right]$$
est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. Par conséquent (FIGURE!!),
$$\forall\, N \geqslant 3, \quad \sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^n} \leqslant \int_2^N \frac{dt}{t^n}.$$
Or, pour tout entier $N \geqslant 3$,
$$\int_2^N \frac{dt}{t^n} = \left[\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_2^N \leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$
On en déduit que
$$\forall\, N \geqslant 3, \quad \sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^n} \leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \tag{3}$$
où le majorant est indépendant de N.

Comme $\sum \frac{1}{k^n}$ est une série de Riemann convergente (puisque $n \geqslant 2$), on peut passer à la limite dans (3) et en déduire que
$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$
2. D'après la question précédente,
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \leqslant \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$
On en déduit que
$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n2^n}\Big) = o\Big(\frac{1}{2^n}\Big)$$
et donc que
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2^n} + o\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}.$$
❧ D'après ce qui précède,
$$\frac{\zeta(n)-1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$
Or la série (géométrique!) $\sum \frac{1}{2^n}$ est absolument convergente. D'après le Théorème de comparaison, la série
$$\sum \frac{\zeta(n)-1}{n}$$
est absolument convergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^{**}$, la sous-famille
$$(x_{k,n})_{(k,n)\in I_n}$$
est sommable car
$$\forall\, (k,n) \in I_n, \quad x_{k,n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Cte}} \cdot \frac{1}{k^n}$$
et la série $\sum \frac{1}{k^n}$ est une série de Riemann convergente (d'exposant $n \geqslant 2$).

On peut donc poser, pour tout $n \in \mathbb{N}^{**}$,
$$s_n = \sum_{(k,n)\in I_n} x_{k,n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{\zeta(n)-1}{n}.$$
D'après **[2.]**, la série (de terme général positif) $\sum s_n$ est convergente. On peut alors déduire du (premier) Théorème de Fubini que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.

4. Pour tout $(k, n) \in I$, il est clair que
$$|y_{k,n}| \leqslant x_{k,n}.$$
Comme la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable, on peut déduire du Théorème de comparaison que la famille $(y_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.

Solution II ❀ Utilisation des polynômes de Tchebychev en analyse

Partie A. Polynômes de Tchebychev

1. a. D'après la Formule du binôme,
$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \cdot i^p \cdot \sin^p\theta. \end{aligned}$$
Pour tout entier p *impair*, le complexe i^p est un imaginaire pur. Par conséquent,
$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \mathfrak{Re}(e^{in\theta}) \\ &= \sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \cdot i^p \sin^p\theta \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \cdot (-1)^k \cdot (\sin^2\theta)^k \qquad (p = 2k) \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \cdot (\cos^2\theta - 1)^k \end{aligned}$$
car $-\sin^2\theta = \cos^2\theta - 1$.

Le polynôme
$$T_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} (X^2-1)^k X^{n-2k} \in \mathbb{R}[X]$$
vérifie donc la relation (1); son degré est inférieur à n (puisque chaque terme de la somme est un polynôme de degré n). Comme le coefficient de X^n est égal à
$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} \binom{n}{2k} > 0,$$

le degré de T_n est bien égal à n.

1. b. S'il existait deux polynômes S_n et T_n tels que

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\quad S_n(\cos\theta) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta,$$

alors on aurait

$$\forall\, x \in [-1,1],\quad S_n(x) - T_n(x) = 0$$

(puisque cos réalise une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$). Le polynôme $S_n - T_n$ aurait donc une infinité de racines et ce serait le polynôme nul, donc $S_n = T_n$.

Il n'existe donc qu'un seul polynôme T_n vérifiant la propriété (1).

2. Pour tout $x \in [-1,1]$, on peut poser $\theta = \operatorname{Arccos} x \in \mathbb{R}$ et on sait alors que
$$\cos\theta = x.$$
On déduit de (1) que

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta = \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

❧ Cette identité n'a pas de sens pour $x \notin [-1,1]$, puisque la fonction Arccos n'est définie que sur $[-1,1]$!

3. a. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. On sait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(n+1)\theta \cdot \cos\theta = \cos(n+1+1)\theta + \cos(n+1-1)\theta$$

(formules d'addition) c'est-à-dire

$$2x \cdot T_{n+1}(x) = T_{n+2}(x) + T_n(x)$$

d'après (2).

❧ On peut en déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

puisque l'intervalle $[-1,1]$ est une partie *infinie* de $\mathbb{R}$.

3. b. Soit en utilisant la formule trouvée au **[1.a.]**, soit en exploitant la relation de récurrence établie à la question précédente, on trouve $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\begin{aligned} T_2 &= \binom{2}{0}\cdot X^2 + \binom{2}{2}\cdot(X^2-1) = 2X^2 - 1 \\ T_3 &= \binom{3}{0}\cdot X^3 + \binom{3}{2}\cdot(X^2-1)X = 4X^3 - 3X. \end{aligned}$$

3. c. Si le coefficient dominant de T_0 est égal à 1, il est clair que le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour $1 \leqslant n \leqslant 3$.

HR : on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que le coefficient dominant de T_{n+1} soit égal à 2^n.

D'après la relation de récurrence du **[3.a.]**,

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Or $\deg T_n = n$ et $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ (d'après **[1.a.]**), donc le coefficient dominant de T_{n+2} est aussi le coefficient dominant de $2XT_{n+1}$, c'est-à-dire $2.2^n = 2^{n+1}$.

Comme HR est vérifiée, on l'a dit, pour $n = 0$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: le coefficient dominant de T_n est égal à 2^{n-1} pour tout entier $n \geqslant 1$ (et égal à 1 pour $n = 0$).

4. a. Soit $0 \leqslant k < n$. (On est prié de remarquer l'inégalité *stricte*.) Pour $x = \cos\theta_k$, on a

$$\operatorname{Arccos} x = \theta_k$$

puisque $0 < \theta_k < \pi$ (ce n'est pas vrai pour $k = n$...).

D'après (2),

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \operatorname{Arccos} x) = \cos(n\theta_k) \\ &= \cos\Big(k\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant k < n$, on a n angles θ_k distincts dans l'intervalle $[0,\pi]$, sur lequel la fonction cos est strictement décroissante (et donc injective). Par conséquent, les abscisses $\cos\theta_k$, $0 \leqslant k < n$, sont deux à deux distinctes et on a trouvé n racines distinctes pour le polynôme T_n.

Or $\deg T_n = n$ par **[1.a.]**, donc le polynôme T_n est scindé à racines simples et comme son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} d'après **[3.c.]** (puisque $n \geqslant 1$) , on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad T_n = 2^{n-1} \prod_{0 \leqslant k < n} (X - \cos\theta_k)^1$$

et en particulier

$$\forall\, x \in [-1,1],\quad T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos\theta_k).$$

4. b. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\big|T_n(x)\big| \underset{(2)}{=} \big|\cos(n \operatorname{Arccos} x)\big| \leqslant 1$$

donc $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$.

Mais Pour $x = 1$, on a $\operatorname{Arccos} x = 0$ et donc

$$T_n(1) = \cos(n \cdot 0) = 1$$

donc $\|T_n\|_\infty = 1$.

❧ Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, toujours d'après (2),

$$T_n(c_k) = \cos\Big(n \cdot \frac{k\pi}{n}\Big) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

puisque $0 \leqslant k\pi/n \leqslant \pi$.

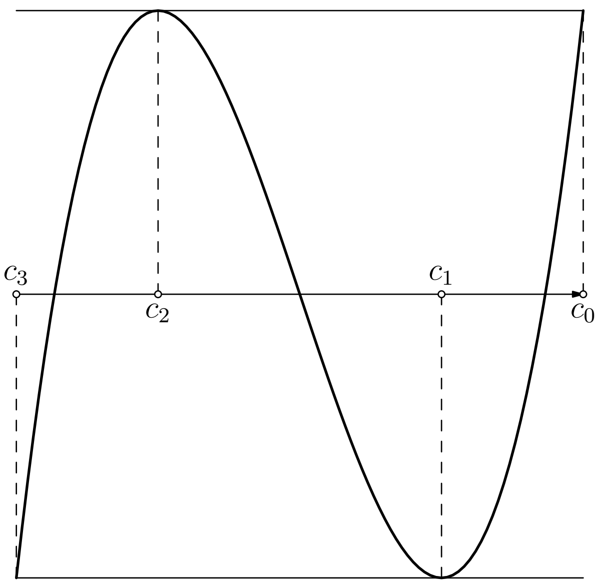
On en déduit d'une part que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\quad \big|T_n(c_k)\big| = 1 = \|T_n\|_\infty$$

et d'autre part que

$$\forall\, 0 \leqslant k < n,\quad T_n(c_{k+1}) = (-1)^{k+1} = -(-1)^k = -T_n(c_k).$$

4. c. Pour $n = 3$, on a $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$ et $c_3 = -1$. D'après la question précédente, la restriction de la fonction T_3 au segment $[-1,1]$ atteint un extremum aux abscisses c_k, $0 \leqslant k \leqslant 3$. Comme les abscisses c_1 et c_2 appartiennent à l'intervalle *ouvert* $]-1,1[$, le graphe de T_3 admet une tangente horizontale en ces points.



Partie B. Polynôme de meilleure approximation quadratique

5. a. Comme $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue et que h est continue sur $[-1,1]$, la fonction $[t \mapsto h(\cos t)]$ est continue sur le segment $[0,\pi]$, donc l'intégrale

$$\int_0^\pi h(\cos t)\,dt$$

existe.

5. b. D'après ce qui précède, la fonction $[t \mapsto h(\cos t)]$ est continue et positive sur un segment $[a,b]$ avec $a \neq b$. Comme son intégrale sur ce segment est nulle, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,\pi], \quad h(\cos t) = 0$$

et donc que

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad h(x) = 0$$

(puisque l'image de $[0,\pi]$ par cos est le segment $[-1,1]$).

5. c. D'après **[5.a.]**, l'intégrale $\langle\, f \,|\, g \,\rangle$ est bien définie pour tout $f \in E$ et tout $g \in E$. On a donc bien défini une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que cette application est symétrique.

Par linéarité de l'intégrale, cette application est bilinéaire sur $E \times E$.

Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant), cette application est positive :

$$\forall\, f \in E, \quad \langle\, f \,|\, f \,\rangle = \int_0^\pi f^2(\cos t)\,dt \geqslant 0.$$

D'après **[5.b.]**, cette application est même définie positive.

Il s'agit donc bien d'un produit scalaire sur E.

6. Soient $0 \leqslant m \leqslant n$. D'après la définition du produit scalaire et (1),

$$\langle\, T_m \,|\, T_n \,\rangle = \int_0^\pi \cos mt \cos nt\,dt.$$

Premier cas : si $m = n = 0$, alors $\langle\, T_0 \,|\, T_0 \,\rangle = \pi$.
Second cas : si $m = n \geqslant 1$, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 nt = \frac{1+\cos 2nt}{2}$$

et donc $\langle\, T_n \,|\, T_n \,\rangle = \pi/2$.
Dernier cas : si $0 \leqslant m < n$, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \cos mt \cos nt = \frac{\cos(m+n)t + \cos(m-n)t}{2}$$

et comme $m+n \neq 0$ et $m-n \neq 0$, alors $\langle\, T_m \,|\, T_n \,\rangle = 0$.

❧ D'après ce dernier cas, la famille $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale. D'après **[1.a.]**, elle est constituée de $(n+1)$ vecteurs *non nuls* de E_n (c'est donc une famille libre) et comme $\dim E_n = n+1$, il s'agit d'une base de E_n.

La famille $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc bien une base orthogonale de E_n.

7. Comme E_n contient en particulier $Q = 0$, l'ensemble

$$\big\{\|f - Q\|_2,\ f \in E_n\big\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle contient $\|f\|_2$), minorée par 0. Cette partie admet donc une borne inférieure réelle (Axiome de la borne supérieure).

8. On sait que E_n est un espace vectoriel et $t_n(f)$ est une combinaison linéaire des polynômes $T_0, \dots, T_n$ qui appartiennent tous à E_n d'après **[1.a.]** Par conséquent, $t_n(f)$ est bien un vecteur de E_n.

❧ Comme les vecteurs $T_0, \dots, T_k, \dots, T_n$ sont deux à deux orthogonaux par **[6.]**, on déduit du théorème de Pythagore que

$$\big\|t_n(f)\big\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle\, T_k \,|\, f \,\rangle^2}{\|T_k\|_2^4}\cdot\|T_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \frac{\langle\, T_k \,|\, f \,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

9. D'après **[6.]**, la famille $(T_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E_n. Par conséquent, $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n si, et seulement si,

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad \big\langle\, f - t_n(f) \,\big|\, T_i \,\big\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle\, f \,|\, T_i \,\rangle = \big\langle\, t_n(f) \,\big|\, T_i \,\big\rangle.$$

Mais on a aussi démontré que $\langle\, T_k \,|\, T_i \,\rangle = 0$ pour tout $i \neq k$, donc

$$\begin{aligned}\big\langle\, t_n(f) \,\big|\, T_i \,\big\rangle &= \sum_{k=0}^n \frac{\langle\, T_k \,|\, f \,\rangle}{\|T_k\|_2^2}\cdot\langle\, T_k \,|\, T_i \,\rangle \\ &= \frac{\langle\, T_i \,|\, f \,\rangle}{\|T_i\|_2^2}\cdot\langle\, T_i \,|\, T_i \,\rangle = \langle\, T_i \,|\, f \,\rangle.\end{aligned}$$

Donc $f - t_n(f)$ est orthogonal à E_n.

REMARQUE.— On vient de démontrer que $t_n(f)$ était le projeté orthogonal de f sur E_n.

10. D'après **[8.]**, $t_n(f)$ appartient à E_n. On peut alors déduire de **[9.]** que $t_n(f)$ et $f - t_n(f)$ sont orthogonaux. Or

$$f = \big[f - t_n(f)\big] + \big[t_n(f)\big]$$

et d'après le Théorème de Pythagore,

$$\|f\|_2^2 = \big\|f - t_n(f)\big\|_2^2 + \big\|t_n(f)\big\|_2^2 \geqslant \big\|t_n(f)\big\|_2^2.$$

La série

$$\sum \frac{\langle\, f \,|\, T_k \,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}$$

est une série de terme général positif et, d'après **[8.]** et l'inégalité précédente, ses sommes partielles sont majorées par $\|f\|_2^2$. Par conséquent, cette série est convergente.

11. Soit $Q \in E_n$. Alors

$$f - Q = \big[f - t_n(f)\big] + \big[t_n(f) - Q\big]$$

où les vecteurs $f - t_n(f)$ et $t_n(f) - Q$ sont orthogonaux (le premier est orthogonal au sous-espace E_n, le second est une combinaison linéaire de vecteurs de E_n). D'après le Théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\|f-Q\|_2^2 &= \big\|f - t_n(f)\big\|_2^2 + \big\|t_n(f) - Q\big\|_2^2\\ &\geqslant \big\|f - t_n(f)\big\|_2^2.\end{aligned}$$

On a trouvé un minorant de $\|f - Q\|_2$ indépendant de Q. Mieux ! Ce minorant est égal à $\|f - Q\|_2$ pour $Q = t_n(f)$: il s'agit donc en fait du minimum. Ainsi

$$d_2(f, E_n) = \big\|f - t_n(f)\big\|_2.$$

On a vu à la question précédente que

$$\big\|f - t_n(f)\big\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \big\|t_n(f)\big\|_2^2$$

et au **[8.]** que

$$\big\|t_n(f)\big\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\, f \,|\, T_k \,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}.$$

Par conséquent,

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle\, f \,|\, T_k \,\rangle^2}{\|T_k\|_2^2}}.$$

Solution III ❀ Reste d'une série alternée

1. Comme la série $\sum (-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, on sait que le reste R_n est du signe du premier terme négligé. Comme les u_k sont tous strictement positifs, le réel R_n est du signe de $(-1)^n$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| = (-1)^n R_n. \tag{4}$$

❧ Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|R_n| + |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n - R_{n+1})\\ &= (-1)^n \big[(-1)^n u_n\big] = u_n.\end{aligned}$$

2. D'après (4), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n (R_n + R_{n+1})\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{n+k} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{n+k} u_k\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} u_{n+p+1}\end{aligned}$$

en effectuant les changements d'indice $k = n+p$ (première somme) et $k = n+p+1$ (deuxième somme). Par linéarité de Σ, on en déduit enfin que

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+p+1}) \tag{5}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général

$$u_{n+p} - u_{n+p+1}$$

tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ et cette suite est décroissante puisque

$$0 \leqslant u_{q+1} - u_{q+2} \leqslant u_q - u_{q+1}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$ et en particulier pour $q = n + p$.

On peut alors déduire de (5) que $|R_n| - |R_{n+1}|$ est la somme d'une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial et donc qu'elle est du signe du premier terme. Or

$$(-1)^0 (u_{n+0} - u_{n+1+0}) = u_n - u_{n+1} \geqslant 0,$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| - |R_{n+1}| \geqslant 0.$$

La suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante.

REMARQUE.— En tant que suite des restes d'une série convergente, la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. D'après (4), la série $\sum R_n$ vérifie donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées.

3. D'après **[1.]** et **[2.]**,

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 1, \quad u_{n-1} &= |R_{n-1}| + |R_n| \geqslant 2|R_n|\\ \text{et} \quad u_n &= |R_n| + |R_{n+1}| \leqslant 2|R_n|\end{aligned}$$

donc

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$$

4. Par hypothèse, u_{n-1}/u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ et $R_n = (-1)^n |R_n|$ d'après (4). On peut alors déduire de l'encadrement précédent que

$$R_n \sim (-1)^n \frac{u_n}{2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ell n\, n}{n}.$$

❧ La suite de terme général u_n tend évidemment vers 0 et le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1 car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \frac{\ell n\, n}{\ell n\, n + \ell n\big(1 + \frac{1}{n}\big)}.$$

❧ L'étude de la fonction $f = \big[x \mapsto \frac{\ell n\, x}{x}\big]$ montre qu'elle est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Par conséquent, seule la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ tend vers 0 en décroissant.

❧ Remarquons enfin que l'inégalité

$$u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$$

équivaut à
$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$$
ou encore (avec les notations ci-dessus) à
$$f\Big(\frac{n+(n+2)}{2}\Big) \leqslant \frac{f(n)+f(n+2)}{2}.$$
Il suffit donc que la fonction f soit convexe pour que cette inégalité soit vérifiée. Le calcul de la dérivée seconde montre que la fonction f est concave sur $\left]0, e^{3/2}\right]$ et convexe sur $\left[e^{3/2}, +\infty\right[$.

❧ Comme $e^{3/2} \approx 4,5$, la suite extraite $(u_n)_{n\geqslant 5}$ vérifie toutes les hypothèses faites au début du sujet, mais pas la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$: cela n'a aucune importance puisqu'on ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique de la suite !

On peut donc en conclure que
$$a_n \sim (-1)^n \frac{\ell n\, n}{2n}$$
lorsque n tend vers $+\infty$.