Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2021/2022 **MP**

Composition de Mathématiques

Le 10 novembre 2021 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On considère les fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par la donnée de

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\Big(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\Big).$$

1. Démontrer que $f_k(x)$ est bien défini et strictement positif pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$.
☞ *On pourra procéder par récurrence sur* k.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, fixé.

2. a. En calculant $\big[f_k(x)\big]^2 - x$, démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k(x) \geqslant \sqrt{x}. \tag{1}$$

2. b. Démontrer que la suite $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. c. Démontrer que

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \sqrt{x}. \tag{2}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

3. a. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\Big(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\Big). \tag{3}$$

3. b. En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \big|f_k(x) - \sqrt{x}\big| \leqslant \frac{1+x}{2^k}. \tag{4}$$

3. c. Proposer un fonction `racine(x)` (écrite en langage Python) qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{x}$ à 10^{-1} près.

3. d. Commenter le code suivant.

```
def comparaison(x):
  r_exacte = np.sqrt(x)
  r_Heron = racine(x)
  erreur_relative = (r_Heron/r_exacte - 1)*100
  return erreur_relative
```

L'exécution de `comparaison(3)` renvoie `0.0`. Que penser de ce résultat ?

❖ II – Problème ❖

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On notera f, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est une droite vectorielle (on en donnera un vecteur directeur) et que le sous-espace $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ est un plan vectoriel (on en donnera une équation cartésienne relative à la base canonique de E).

2. Démontrer que les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ sont supplémentaires dans E :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2.$$

Calculer la matrice (relative à la base canonique de E) de la projection sur la droite $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement au plan $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$. En déduire la matrice de la projection sur le plan $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ parallèlement à la droite $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

3. Expliciter une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) &= \mathbb{R}\cdot e_1, \\ \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) &= \mathbb{R}\cdot e_2, \\ \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2 &= \mathrm{Vect}(e_2, e_3). \end{aligned}\right.$$

4. Calculer la matrice B qui représente l'endomorphisme f dans la base (e_1, e_2, e_3). Décomposer cette matrice en somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice N :

$$B = D + N$$

telles que

$$ND = DN \quad \text{et} \quad N^2 = 0_3.$$

*Dans la suite, on va déduire de ce qui précède une décomposition de la matrice A, dite **décomposition de Dunford**.*
Le principal enjeu est de limiter les calculs au strict minimum, en étudiant le problème de manière assez abstraite.

5. Démontrer que $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de f (ou de A). S'agit-il du polynôme minimal ?

6. Décomposer la fraction

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$$

en éléments simples. En déduire deux polynômes U et V tels que

$$(X-1)U+(X-2)^2V=1$$

avec $\deg U<2$ et $\deg V<1$.

7. On considère les endomorphismes

$$p=(f-2\,\mathrm{Id})^2\circ V(f) \quad \text{et} \quad q=(f-\mathrm{Id})\circ U(f).$$

☞ *On rappelle qu'on cherche à limiter les calculs au strict minimum !*

7. a. Calculer $p(u)+q(u)$ pour tout $u\in E$.

7. b. Démontrer que

$$p(u)\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) \quad \text{et que} \quad q(u)\in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2$$

pour tout $u\in E$.

7. c. En déduire que p est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2$ et que q est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

8. On pose $d=p+2q$ et $n=f-d$.

8. a. Calculer la matrice de d relative à la base (e_1,e_2,e_3) (définie en **[3.]**).

8. b. En déduire que n^2 est l'application nulle.

8. c. Démontrer qu'un endomorphisme g de E commute à l'endomorphisme f si, et seulement si, il commute aux endomorphismes p, q et n.

❖ III – Problème ❖

On rappelle que

$$\forall\, x>1, \quad \zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Partie A. Nombres de Bernoulli

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli est définie par la donnée de

$$b_0=1$$

et la relation de récurrence

$$\forall\, n\geqslant 1, \quad b_n=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k.$$

Euler a démontré la relation suivante entre les nombres de Bernoulli et la fonction ζ :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*, \quad \zeta(2k)=\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-1}\pi^{2k}b_{2k}}{(2k)!}.$$

1. Démontrer que b_n est un nombre rationnel pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Écrire une fonction `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée de b_n (= un flottant). On pourra utiliser la fonction `binomial(n, p)` qui renvoie l'entier $\binom{n}{p}$.

3. On se propose ici de réfléchir au calcul des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$.

3. a. Écrire une fonction `f(n)` qui renvoie l'entier $n!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. b. On considère la fonction suivante, qui renvoie l'entier $\binom{n}{p}$.

```
def binom(n, p):
  if not(0 <= p <= n):
    return 0
  return f(n)//(f(p)*f(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lors de l'exécution de `binom(30, 20)` ? Comment réduire ce nombre de multiplications à 20 ?

Quel serait le type du résultat renvoyé si la dernière ligne de la fonction était remplacée par la ligne suivante ?

```
  return f(n)/(f(n)*f(n-p))
```

3. c. Démontrer que

$$\forall\, n\geqslant p\geqslant 1, \quad \binom{n}{p}=\frac{n}{p}\cdot\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction *récursive* qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Partie B. Fonction ζ et diviseurs d'un entier

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$\forall\, x>1, \quad f_n(x)=\frac{1}{n^x}.$$

4. Soit $a>1$. Démontrer que la série

$$\sum\frac{\ell n\, n}{n^a}$$

converge.

5. Démontrer que la fonction ζ est décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

6. La série

$$\sum\lim_{x\to 1}f_n(x)$$

est-elle convergente ?

7. a. Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe un entier $n_1\geqslant 1$ tel que

$$\forall\, x\geqslant 2, \quad 0\leqslant\sum_{n=n_1+1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\leqslant\varepsilon.$$

7. b. Démontrer qu'il existe un réel $A\geqslant 2$ tel que

$$\forall\, x\geqslant A, \quad 0\leqslant\sum_{n=2}^{n_1}\frac{1}{n^x}\leqslant\varepsilon.$$

7. c. Déterminer la limite de ζ au voisinage de $+\infty$.

8. Pour tout $x>1$, on pose

$$I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}.$$

Démontrer que

$$\forall\, x > 1, \quad I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note d_n, le nombre de diviseurs de n.

9. a. Que vaut d_{12} ?

9. b. Dans quel cas l'entier d_n est-il pair ? impair ?

10. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

10. a. Démontrer que l'ensemble A est dénombrable.

10. b. Soit $x > 1$. Démontrer que la famille

$$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$$

est sommable et que sa somme est égale à $\zeta(x)^2$.

10. c. En déduire que

$$\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

☞ *On pourra considérer les ensembles*

$$A_n = \big\{(a, b) \in A \ : \ ab = n\big\}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution I ❀ Racine carrée par la méthode de Héron

1. Il est clair que la fonction f_0 est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

HR : On suppose qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction f_k soit définie et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

Dans ces conditions, la relation de récurrence montre que $f_{k+1}(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (en particulier, pas de division par 0) et strictement positif comme moyenne d'un réel $f_k(x) > 0$ et d'un réel positif ou nul (le second terme).

On a ainsi démontré par récurrence que : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, le réel $f_k(x)$ est bien défini et strictement positif.

Remarque.— On pouvait aussi remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intervalle $]0, +\infty[$ était manifestement stable par la fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto \frac{1}{2}\Big(t + \frac{x}{t}\Big)\right].$$

En conséquence, il existe une, et une seule, suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ telle que $u_0 = 1$ et $u_{k+1} = \varphi(u_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Bien entendu, $u_k = f_k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_k(x)^2 - x &= \frac{1}{4}\Big[f_{k-1}(x)^2 + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\Big] - \frac{4x}{4} \\ &= \frac{1}{4}\Big[f_{k-1}(x)^2 - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\Big]^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Comme $f_k(x) > 0$ **[1.]** et que $\sqrt{x} \geqslant 0$, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k(x) \geqslant \sqrt{x}.$$

Remarque.— On aurait pu aussi bien étudier les variations de la fonction φ définie plus haut et en conclure que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k(x) = \varphi\big(f_{k-1}(x)\big) \geqslant \min_{u\in\mathbb{R}_+} \varphi(u) = \sqrt{x}.$$

2. b. Pour $k \geqslant 2$, on a démontré que $f_{k-1}(x)^2 \geqslant x$. Comme $f_{k-1}(x) > 0$,

$$\frac{x}{f_{k-1}(x) \cdot f_{k-1}(x)} \leqslant 1$$

et par conséquent

$$\frac{x}{f_{k-1}(x)} \leqslant f_{k-1}(x).$$

Donc

$$f_k(x) \leqslant \frac{1}{2}\big(f_{k-1}(x) + f_{k-1}(x)\big) = f_{k-1}(x).$$

On a ainsi démontré que la suite $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ était décroissante.

Remarque.— Comme $f_0(x) = 1$ est choisi indépendamment de x, il est possible que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad f_0(x) \leqslant \sqrt{x} \leqslant f_k(x)$$

et donc que la suite $\big(f_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ne soit pas décroissante : il convient d'être vigilant sur l'index !

2. c. La suite est décroissante **[2.b.]** et minorée par $\sqrt{x}$ d'après (1), donc elle converge.

❧ Si $x > 0$, alors $\sqrt{x} > 0$ et la limite ℓ_x de la suite est strictement positive. On peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence. D'après le Théorème de composition des limites,

$$\ell_x = \frac{1}{2}\Big(\ell_x + \frac{x}{\ell_x}\Big)$$

donc $\ell_x^2 = x$ et finalement $\ell_x = \sqrt{x}$ (puisque $\ell_x > 0$).

❧ Si $x = 0$, alors $f_k(x) = 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et dans ce cas, la limite est égale à $0 = \sqrt{x}$.

❧ En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (nul ou strictement positif), la limite de la suite $\big(f_k(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est égale à $\sqrt{x}$.

3. a. D'après l'identité remarquable bien connue,

$$\big(f_k(x) - \sqrt{x}\big)^2 = f_k(x)^2 - 2\sqrt{x}\, f_k(x) + x.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\Big(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\Big) &= \frac{1}{2}\Big(f_k(x) - 2\sqrt{x} + \frac{x}{f_k(x)}\Big) \\ &= f_{k+1}(x) - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

3. b. D'après (1),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$$

donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}.$$

Une récurrence immédiate permet d'en déduire que

$$\forall\, k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{f_1(x) - \sqrt{x}}{2^{k-1}}$$

et il est bien clair que cet encadrement est encore vrai pour $k = 1$.

❧ Il reste à encadrer $\big|f_1(x) - \sqrt{x}\big|$ pour vérifier que

$$\big|f_1(x) - \sqrt{x}\big| = \Big|\frac{1+x}{2} - \sqrt{x}\Big| \leqslant \frac{1+x}{2}$$

c'est-à-dire à

$$\sqrt{x} \leqslant 1 + x.$$

Comme la fonction $\big[t \mapsto \sqrt{t}\big]$ est concave, son graphe est situé sous ses tangentes et en particulier sous la tangente au point d'abscisse 1 :

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \sqrt{t} \leqslant \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (t-1) = \frac{1+t}{2} \leqslant 1 + t.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

et donc que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.$$

3. c. Tant que $2^{-k}(1+x) > 10^{-1}$, il est possible (mais pas certain) que

$$\left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| > 10^{-1}.$$

On pourrait en déduire qu'il nous faut choisir

$$k > \lg[10(x+1)]$$

pour être sûr de la validité de notre approximation au moyen d'une boucle *for*. Mon goût me porte à privilégier une boucle *while*...

```
def racine(x):
  f = 1
  majo_erreur = 1 + x
  while (majo_erreur>1e-1):
    f = .5*(f + x/f)
    majo_erreur *= .5
  return f
```

Pour le reste, je choisis des identifiants de variables qui rendent les commentaires superflus.

3. d. L'erreur relative est définie par

$$\frac{\text{valeur calculée} - \text{valeur exacte}}{\text{valeur exacte}}.$$

On approche ici $\sqrt{x}$ calculée de manière "exacte" avec la fonction `sqrt` par la valeur approchée de $\sqrt{x}$ calculée par itération avec la fonction précédente. Le code nous renvoie donc, comme il le promet, l'erreur relative exprimée en pourcentage.

❧ Dire que l'erreur relative est égale à $0,0\%$ signifie qu'on a obtenu la valeur "exacte" (pour la précision usuelle des nombres flottants) alors qu'on s'attendait à une précision de l'ordre de 10^{-1}.

Autrement dit, l'estimation (4) de l'erreur est très, très pessimiste ! On aurait pu s'en douter : on a majoré le facteur

$$\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$$

par 1 alors qu'on sait qu'il tend vers 0 !

Solution II ❀ Une décomposition de Dunford

1. Il est clair que

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est donc clair que les vecteurs

$$e_1 = (0,1,1) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

et que

$$e_2 = (1,1,0) \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}),$$

donc les rangs de ces matrices sont au plus égaux à 2.

Comme chaque matrice contient au moins deux colonnes non proportionnelles, les rangs de ces matrices sont au moins égaux à 2. Ces deux matrices sont donc de rang 2 et en particulier

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R} \cdot (0,1,1).$$

(C'est donc une droite vectorielle.)

D'autre part, le rang de la matrice

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 1 (toutes les colonnes sont proportionnelles et la matrice n'est pas nulle). D'après le Théorème du rang, son noyau est donc un plan vectoriel. D'après la deuxième ou la troisième ligne de la matrice, ce plan admet pour équation cartésienne dans la base canonique

$$[-x + y = 0]$$

(ou $[x - y = 0]$ si l'on préfère).

2. D'après la question précédente,

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \dim(f - 2\,\mathrm{Id})^2 = 1 + 2 = 3 = \dim E.$$

De plus, le vecteur e_1, qui dirige la droite, ne vérifie pas l'équation du plan, donc ces deux sous-espaces sont en somme directe. On a ainsi démontré que

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2 = E.$$

❧ Soit $u = (x,y,z) \in E$. Le projeté $p(u)$ de ce vecteur sur la droite $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est proportionnel au vecteur directeur e_1 :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad p(u) = (0, \alpha, \alpha)$$

et le vecteur $u - p(u) = (x, y - \alpha, z - \alpha)$ appartient au plan $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$, donc

$$-(x) + (y - \alpha) = 0$$

c'est-à-dire $\alpha = -x + y$. On en déduit que

$$p(u) = (0, -x + y, -x + y).$$

La matrice relative à la base canonique de E de la projection sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (A - 2I_3)^2.$$

On en déduit que la matrice de la projection sur le plan $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ parallèlement à la droite $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est

$$I_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Les vecteurs e_1 et e_2 définis plus haut satisfont les deux premières conditions. Il est clair que le vecteur

$$e_3 = (0,0,1)$$

appartient au plan d'équation $[x-y=0]$ et comme il n'est pas proportionnel au vecteur e_2, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2 = \operatorname{Vect}(e_2, e_3).$$

❧ Comme les sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2$$

sont supplémentaires dans E **[2.]**, on obtient une base de E en concaténant des bases de ces deux sous-espaces. Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

4. Par définition,

$$(f-\mathrm{Id})(e_1) = (f-2\,\mathrm{Id})(e_2) = 0_E$$

et d'après la matrice $(A-2I_3)$,

$$(f-2\,\mathrm{Id})(e_3) = e_2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ f(e_2) &= 0\cdot e_1 + 2\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ f(e_3) &= 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3 \end{aligned}$$

et donc que la matrice de f relative à la base (e_1, e_2, e_3) est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

❧ En posant

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient deux matrices telles que $B = D + N$, avec $DN = ND$ et $N^2 = 0_3$.

5. Dans la base (e_1, e_2, e_3), l'endomorphisme

$$(f-\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})^2$$

est représenté par la matrice

$$\begin{aligned} (B-I_3)(B-2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \end{aligned}$$

donc c'est l'endomorphisme nul. Ainsi, $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de f et donc de A.

❧ On connaît ainsi un polynôme annulateur unitaire de f. S'il ne s'agissait pas du polynôme minimal de f, alors le polynôme minimal de f serait un diviseur unitaire de degré 1 ou 2 de ce polynôme et il n'en existe que quatre :

$$(X-1), \quad (X-2), \quad (X-1)(X-2), \quad (X-2)^2.$$

Or $(X-1)$ et $(X-2)$ ne sont clairement pas annulateurs (puisque f n'est pas une homothétie) et d'autre part, dans la base (e_1, e_2, e_3), les endomorphismes $(f-\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})$ et $(f-2\,\mathrm{Id})^2$ sont représentés par les matrices :

$$(B-I_3)(B-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(B-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui sont toutes deux différentes de 0_3.

On ainsi justifié par élimination que $(X-1)(X-2)^2$ était bien le polynôme minimal de f.

6. La décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

En étudiant la fonction rationnelle
- — au voisinage de 1, on trouve $a = 1$;
- — au voisinage de 2, on trouve $c = 1$
- — et au voisinage de $+\infty$, on trouve $a + b = 0$, donc $b = -1$.

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}.$$

❧ En réduisant au même dénominateur (mais sans développer le numérateur !), on en déduit que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{(X-2)^2 + (X-1)(3-X)}{(X-1)(X-2)^2}$$

donc $U = 3 - X$ et $V = 1$ conviennent.

7. a. Par définition de U et V, on a

$$(X-1)U + (X-2)^2 V = 1$$

et donc (morphisme d'algèbres !)

$$(f-\mathrm{Id})\circ U(f) + (f-2\,\mathrm{Id})^2 \circ V(f) = \mathrm{Id}$$

c'est-à-dire $q + p = \mathrm{Id}$. Par conséquent,

$$\forall\, u \in E, \quad p(u) + q(u) = u.$$

7. b. On a justifié au **[5.]** que

$$\forall\, w \in E, \qquad (f-\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})^2(w) = 0_E$$

et donc que

$$\forall\, w \in E, \qquad (f-2\,\mathrm{Id})^2\circ(f-\mathrm{Id})(w) = 0_E$$

puisque la sous-algèbre $\mathbb{R}[f]$ des polynômes en $f \in L(E)$ est commutative.

On en déduit que, pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} (f-\mathrm{Id})[p(u)] &= (f-\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})^2\circ V(f)(u) \\ &= \big[(f-\mathrm{Id})\circ(f-2\,\mathrm{Id})^2\big]\big(V(f)(u)\big) \\ &= 0_E \\ (f-2\,\mathrm{Id})^2[q(u)] &= (f-2\,\mathrm{Id})^2\circ(f-\mathrm{Id})\circ U(f)(u) \\ &= \big[(f-2\,\mathrm{Id})^2\circ(f-\mathrm{Id})\big]\big(U(f)(u)\big) \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$p(u) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad q(u) \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$$

pour tout $u \in E$.
7. c. D'après **[2.]**,

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$$

et d'après **[7.a.]** et **[7.b.]**, pour tout $u \in E$,

$$u = \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})} + \underbrace{q(u)}_{\in \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})^2}.$$

Par *définition des projections*, on en déduit que $p(u)$ est le projeté de u sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ et que $q(u)$ est le projeté de u sur $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
8. a. Comme $e_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on a

$$p(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad q(e_1) = 0_E.$$

Comme e_2 et e_3 appartiennent à $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$, on a de même

$$\begin{aligned} p(e_2) &= 0_E \qquad \text{et} \quad q(e_2) = e_2, \\ p(e_3) &= 0_E \qquad \text{et} \quad q(e_3) = e_3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$d(e_1) = e_1, \quad d(e_2) = 2 \cdot e_2, \quad d(e_3) = 2 \cdot e_3$$

et la matrice de d relative à la base (e_1, e_2, e_3) est la matrice D trouvée en **[4.]**.
8. b. Comme B est la matrice de f relative à la base (e_1, e_2, e_3), on en déduit que la matrice $N = B - D$ définie au **[4.]** est la matrice de $n = f - d$ relative à cette base (e_1, e_2, e_3).

Comme $N^2 = 0_3$, on en déduit sans calcul supplémentaire que n^2 est l'endomorphisme identiquement nul.
8. c. Si g commute à p, q et n, alors en particulier g commute à $p + 2q = f$.

Réciproquement, si g commute à f, alors g commute à tout polynôme en f donc commute en particulier à p et à q (qui sont par construction des polynômes en f) et aussi à

$$n = f - d = f - (p + 2q)$$

qui est un polynôme en f.

REMARQUE.— Cette remarque permet de caractériser assez facilement le commutant de f (à condition de bien connaître le cours sur la réduction des endomorphismes).

Solution III ❀ Fonction ζ et arithmétique

Partie A. Nombres de Bernoulli

1. Il est clair que $b_0 = 1$ est un nombre rationnel.

HR : on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que les nombres de Bernoulli

$$b_0, b_1, \dots, b_n$$

soient tous rationnels. Comme les coefficients binomiaux sont des entiers et que le facteur $\frac{-1}{n+2}$ est rationnel, on déduit de la relation de récurrence que

$$b_{n+1} = \frac{-1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} b_k$$

est aussi un rationnel.

On a ainsi démontré par récurrence que tous les nombres de Bernoulli sont des rationnels.
2. On suit pas à pas la définition des nombres de Bernoulli. Ce calcul coûte cher : pour calculer b_n, il faut au préalable calculer b_0, b_1, ..., b_{n-1}.

```
def bernoulli(n):
  b = [ 1 ] # b[0]
  # on calcule b[1], ..., b[n]
  for i in range(1, n+1):
    bi = 0
    # on somme pour k=0,...,i-1
    for k in range(i):
      bi += binomial(i+1, k)*b[k]
    bi *= -1/(i+1)
    b.append(bi)
  # on renvoie seulement b[n]
  return b[-1]
```

On repousse à plus tard la définition de la fonction `binomial` (*top down, baby!*). À ma connaissance, il n'existe pas de fonction python donnant les coefficients binomiaux — c'est plus qu'étrange !
3. a. Le code est direct : on calcule le produit de proche en proche.

```
def f(n):
  produit = 1
  for k in range(1, n+1):
    produit *= k
  return produit
```

Pourquoi coderait-on cette fonction récursivement ? ? ?
3. b. Le calcul de `f(k)` effectue exactement k produits. Par conséquent, le calcul de `binom(n,p)` effectue

$$n + p + (n - p) + 1 = 2n + 1$$

produits (et une division entière). Ainsi, le calcul de `binom(30, 20)` effectue 61 produits...

❧ Pour réduire sensiblement le nombre de produits calculés, il faut coder en suivant l'expression mathématique :

$$\binom{30}{20} = \binom{30}{30-20} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10}$$

où on n'effectue que 9 multiplications au numérateur, 8 multiplications au dénominateur (on ne va pas compter la multiplication par 1... si ? vraiment ?) et une division, soit en tout 18 multiplications.

Voir plus bas la mise en œuvre de ce programme.

❧ Avec un seul `/`, on effectue une division dont le résultat est un flottant et non plus une division euclidienne (dont le quotient est un entier). On aurait ainsi une valeur approchée (à 10^{-15} ou 10^{-16} près...) du coefficient binomial.

3. c. Pour $n \geqslant p \geqslant 1$, on a $n-1 \geqslant p-1 \geqslant 0$ et

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{p\cdot(p-1)!\big[(n-1)-(p-1)\big]!} = \frac{n}{p}\cdot\binom{n-1}{p-1}.$$

(On rappelle que $0! = 1$, pas de division par 0 dans ce calcul !)

❧ On commence par traiter les deux cas de base : si $p < 0$ ou si $p = 0$, il n'y a aucun calcul à effectuer. On exploite ensuite la symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

en faisant en sorte de choisir le plus petit entier entre p et $(n-p)$.

On achève le code de la fonction par un appel récursif qui applique la relation de récurrence qu'on vient d'établir. Il faut faire attention à écrire une division euclidienne (avec // et pas avec /) et à n'effectuer cette division euclidienne qu'*après* avoir effectué le produit (c'est le produit $n\binom{n-1}{p-1}$ qui est divisible par p, on ne peut pas savoir si l'un des deux facteurs est divisible par p).

```
def binomial(n, p):
  if (p<0):
    return 0
  elif (p==0):
    return 1
  elif (2*p>n):
    return binomial(n, n-p)
  else:
    return (binomial(n-1, p-1)*n)//p
```

REMARQUE.— On n'est pas obligé de coder récursivement cet algorithme — mais il faut bien admettre que le code récursif est plus digeste que son analogue itératif !

```
def binomial_2(n, p):
  if (p<0) or (p>n):
    return 0
  elif (2*p>n):
    p = n-p
  if p==0:
    return 1
  else:
    facteur = n-p+1
    resultat = facteur
    for k in range(2, p+1):
      facteur += 1
      resultat = (resultat*facteur)//k
    return resultat
```

Partie B. Fonction ζ et diviseurs d'un entier

4. Posons

$$\alpha = \frac{a-1}{2} > 0$$

de telle sorte que

$$\frac{\ell n\, n}{n^a} = \frac{\ell n\, n}{n^{1+2\alpha}} = \frac{\ell n\, n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}} \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\Big).$$

Or $1+\alpha > 1$, donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ est absolument convergente et, par comparaison, la série $\sum \frac{\ell n\, n}{n^a}$ est absolument convergente (et donc convergente, puisqu'il s'agit d'une série numérique).

5. Soient $1 < x < y$. Il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{n^y} \leqslant \frac{1}{n^x}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient que

$$\zeta(y) \leqslant \zeta(x).$$

Cela prouve que la fonction ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

6. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\lim_{x\to1} f_n(x) = \frac{1}{n}$$

donc la série est divergente (série harmonique).

7. a. En tant que reste d'une série convergente,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

et comme il s'agit d'une série de terme général positif, il existe un rang $n_1 \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, N \geqslant n_1, \quad 0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon.$$

On choisit $N = n_1$ (par exemple). Par décroissance en fonction de x (en s'inspirant de **[5.]**),

$$\forall\, x \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \sum_{n=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=n_1+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon.$$

7. b. Le rang n_1 est fixé. Pour tout entier $2 \leqslant n \leqslant n_1$ (mais pas pour $n = 1$!), on a $0 < {}^1\!/_n < 1$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0.$$

Par linéarité (puisqu'il n'y a qu'un nombre *fini* et *fixe* de termes dans la somme étudiée),

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{n_1} \frac{1}{n^x} = 0$$

donc, en revenant à la définition de la limite, il existe un réel $A \geqslant 2$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad \Big|\sum_{n=2}^{n_1} \frac{1}{n^x}\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Comme les termes sont positifs, on en déduit que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{n_1} \frac{1}{n^x} \leqslant \varepsilon.$$

7. c. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A \geqslant 2$ tel que

$$\forall\, x \geqslant A, \quad 0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1 \leqslant 2\varepsilon.$$

Autrement dit, $\zeta(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

8. Soit $x > 1$. La fonction $f = [t \mapsto t^{-x}]$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $A \geqslant 1$,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{-1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_1^A$$

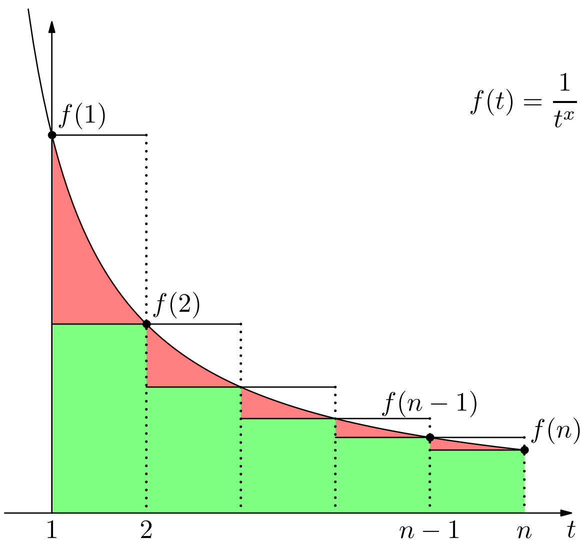
donc l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

est convergente et égale à $\frac{1}{x-1}$.

❧ La fonction f étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, la série $\sum f(n)$ est convergente (rien de nouveau, c'est une série de Riemann!) et comme on le voit sur la figure

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant \int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x}.$$



En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant I(x) \leqslant \zeta(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 1, \qquad I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1.$$

❧ Le calcul explicite de $I(x)$ nous donne

$$I(x) + 1 \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

et par encadrement, on en déduit que

$$\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

En particulier, $\zeta(x)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

9. a. Les diviseurs de 12 sont :

$$1, 2, 3, 4, 6 \quad \text{et} \quad 12$$

donc $d_{12} = 6$.

9. b. Un entier d divise n si, et seulement si, il existe un entier q tel que $n = qd$ et le quotient q est également un diviseur de n : on peut donc regrouper les diviseurs de n par paires (d, q) en supposant que $d \leqslant q$.

Si n est un carré, alors il existe un entier p tel que $n = p^2$. Dans ce cas, il existe une paire de diviseurs égale à (p, p) et toutes les autres paires (d, q) vérifient $d < q$.

Si n n'est pas un carré, toutes les paires de diviseurs sont de la forme (d, q) avec $d < q$, donc le nombre d_n de diviseurs est un entier pair.

En conclusion, l'entier d_n est impair si, et seulement si, l'entier n est un carré.

10. a. L'application $[n \mapsto n+1]$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{N}^*$ est dénombrable et A est dénombrable en tant que produit cartésien de deux ensembles dénombrables.

10. b. Comme $x > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ est absolument convergente, donc les deux familles

$$\left(\frac{1}{a^x}\right)_{a \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{b^x}\right)_{b \in \mathbb{N}^*}$$

sont sommables. Par conséquent, la famille

$$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A} = \left(\frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{b^x}\right)_{(a,b) \in A}$$

est sommable et sa somme est égale à

$$\left(\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^x}\right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{b^x}\right) = \big(\zeta(x)\big)^2.$$

10. c. On sait **[10.b.]** que la famille

$$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A}$$

est sommable.

❧ L'application

$$[(a, b) \mapsto ab]$$

est une application de A dans $\mathbb{N}^*$, donc la famille

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

de ses lignes de niveau est une partition dénombrable de l'index A.

❧ Chaque sous-famille

$$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b) \in A_n}$$

est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable) et nous noterons σ_n sa somme.

Par définition, $(a, b) \in A_n$ si, et seulement si, $ab = n$, c'est-à-dire si a est un diviseur de n et si b est le quotient de la division euclidienne de n par a. Donc $\#(A_n) = d_n$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_n = \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} = \frac{d_n}{n^x}.$$

❧ D'après le Théorème de Fubini,

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n$$

et d'après **[10.b.]**,

$$\big(\zeta(x)\big)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$