Composition de Mathématiques

Le 1er décembre 2021 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

❖ I – Problème ❖

Les trois parties de ce problème sont complèment indépendantes.

Partie A. Coefficients de Fourier

1. a. Donner un exemple de série divergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ soit convergente.

1. b. On considère cette fois une série absolument convergente $\sum u_n$. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n|^2 \leqslant |u_n|$$

et en déduire que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente.

1. c. Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ soit divergente.

2. Dans cette question, on considère une fonction

$$f \;:\; [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f(0) = f(2\pi)$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt.$$

2. a. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad c_n = \frac{-id_n}{n}.$$

2. b. En déduire que la série $\sum c_n^2$ est convergente.

2. c. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |c_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{|d_n|^2}{2}.$$

2. d. *En admettant que* la série $\sum d_n^2$ soit absolument convergente (Théorème de Bessel), démontrer que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

3. On conserve les notations de la question précédente et on considère maintenant la fonction

$$f = [t \mapsto t(2\pi - t)]\,.$$

3. a. Tracer le graphe de f.

3. b. Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} te^{-int}\,dt = \frac{2i\pi}{n}.$$

3. c. En déduire que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

Partie B. Transformée de Fourier

Soit f, une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it/n}\,dt.$$

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

6. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. (On précisera sa limite.)

Partie C. Transformée de Laplace

Soit f, une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt.$$

7. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?

8. Démontrer que la suite (v_n) est bornée.

9. Démontrer que la suite de terme général $w_n = nv_n$ converge vers $f(0)$.

❖ II – Problème ❖

On note I, l'intervalle $[1, +\infty[$ et E, l'espace vectoriel réel des fonctions continues et bornées sur I. On fixe un réel a strictement positif et, pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $U(f) \;:\; I \to \mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in I, \quad U(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt$$

ainsi que la quantité

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} \big|f(x)\big|,$$

dite **norme uniforme de** f **sur** I.

1. Soit $f \in E$.

1. a. Démontrer que la fonction $U(f)$ est bien définie sur l'intervalle I, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

1. b. Démontrer que $U(f)$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y'(x) - ay(x) = -f(x) \tag{E_f}$$

qui soit bornée sur I.

2. Démontrer que U est un endomorphisme de E et que

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|U(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\|f\|_\infty.$$

Cet endomorphisme est-il injectif ?

Partie A. Comportement de U sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie

3. Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, on considère la fonction f_k définie par

$$\forall\, x \in I, \quad f_k(x) = e^{-kx}.$$

3. a. Calculer $U(f_k)$.
3. b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a\lambda \leqslant 1$. Démontrer que le sous-espace $\mathrm{Ker}(U - \lambda I_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Quelle est sa dimension ?
3. c. Expliciter $U^n(f_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{R}_+$. En déduire la limite de $U^n(f_k)(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.
4. a. Soit $P = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. Démontrer qu'il existe un endomorphisme U_P de P tel que

$$\forall\, \varphi \in P, \quad U_P(\varphi) = U(\varphi).$$

4. b. Expliciter la matrice M qui représente U_P dans la base $(\sin, \cos)$.
4. c. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de M^n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_n = \big[t \mapsto e^{-t}t^n\big].$$

5. a. Démontrer que la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
5. b. Établir une relation entre φ_n, $U(\varphi_n)$ et $U(\varphi_{n-1})$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. c. En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel F_p engendré par $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ est stable par U.

On note T, la matrice de l'endomorphisme induit par restriction de U à F_2 relative à la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.
5. d. La matrice T est-elle diagonalisable ?
5. e. Calculer le polynôme minimal de T.
5. f. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la limite de T^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. Propriétés analytiques de U

6. Soit $f \in E$. Démontrer que

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$.
7. Soit $f \in E$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée f' est bornée sur I (de telle sorte que $f' \in E$). Démontrer que

$$\big[U(f)\big]' = U(f').$$

8. Soit $f \in E$.
8. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in I, \quad U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(x+t)\,dt.$$

8. b. En déduire que

$$\forall\, x \in I, \quad \big|U(f)(x)\big| \leqslant U\big(|f|\big)(x).$$

8. c. On suppose que $f \in E$ est une fonction décroissante à valeurs positives. Démontrer que $U(f)$ est aussi une fonction décroissante à valeurs positives et que

$$\forall\, x \in I, \quad a\,U(f)(x) \leqslant f(x).$$

Partie C. Étude asymptotique de $U(f)$

Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et $\beta : I \to \mathbb{R}$, deux applications continues, l'application β étant strictement positive et intégrable sur I.
9. Soit $f \in E$, admettant une limite $b \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$. Démontrer que $U(f)$ admet une limite au voisinage de $+\infty$ et préciser la valeur de cette limite.
☞ *On pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$.*
10. Pour tout $\omega > 0$, on pose

$$g_\omega = \left[t \mapsto \frac{1}{t^\omega}\right] \quad \text{et} \quad h_\omega = U(g_\omega).$$

10. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in I, \quad h_\omega(x) = \frac{1}{a}g_\omega(x) - \frac{\omega}{a}h_{\omega+1}(x)$$

et en déduire que

$$h_\omega(x) \sim \frac{1}{a}g_\omega(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
10. b. On suppose que $f(x) \sim g_\omega(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Démontrer que

$$U(f)(x) \sim \frac{1}{a}f(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
11. a. Soit $u \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|e^u - \sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\right| \leqslant C\,\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En déduire que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad e^u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^k}{k!}.$$

11. b. Démontrer que

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,dt = \ell n\, x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-a)^k(x^k-1)}{k.\,k!}$$

pour tout $x \in I$.
11. c. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(x^k-1)}{k\cdot k!} = -\,\ell n\, x + K - \frac{e^{-x}}{x} + o(e^{-x}/x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
11. d. Comment préciser le développement asymptotique précédent ?

Solution I ❀ Calcul intégral

Partie A. Coefficients de Fourier

1. a. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, tandis que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (cours).

1. b. Comme la série $\sum u_n$ est absolument convergente, son terme général u_n tend vers 0, donc (en prenant $\varepsilon = 1 > 0$ dans la définition) il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n - 0| \leqslant 1$$

et donc tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n^2| \leqslant |u_n|.$$

Par hypothèse, la série $\sum |u_n|$ est convergente. Par comparaison, la série de terme général *positif* $\sum |u_n^2|$ est elle aussi convergente, ce qui signifie que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

1. c. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (Critère spécial des séries alternées), tandis que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

REMARQUE.— D'après **[1.b.]**, pour trouver un contre-exemple, il faut choisir une série *semi-convergente* : c'est pour cette raison qu'on a choisi une série alternée.

2. a. Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut intégrer par parties (on intègre ici sur un segment). Comme $f(0) = f(2\pi)$,

$$\left[\frac{f(t)e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad c_n = \frac{-id_n}{n}.$$

2. b. La fonction f' est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle est bornée :

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad \left|f'(t)e^{-int}\right| = \left|f'(t)\right| \leqslant \|f'\|_\infty.$$

On en déduit (Inégalité de la moyenne) que

$$|d_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f'(t)e^{-int}\right|\,dt \leqslant \|f'\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$ d'après **[2.a.]** Par conséquent,

$$c_n^2 = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$ et, par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum c_n^2$ est absolument convergente.

Comme la convergence absolue implique la convergence (pour les séries complexes au moins), on en déduit que la série $\sum c_n^2$ est convergente.

2. c. D'après **[2.a.]**,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 2|c_n| = \frac{2|d_n|}{n}.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

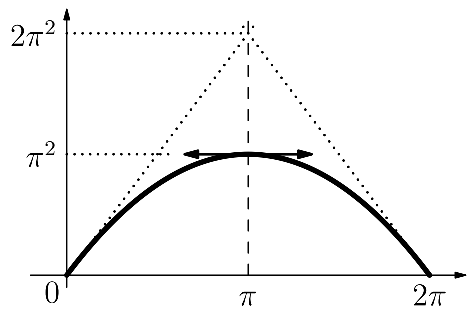
$$0 \leqslant \Big(|d_n| - \frac{1}{n}\Big)^2 = |d_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|c_n|$$

donc on a bien :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |c_n| \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{|d_n|^2}{2}.$$

2. d. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ et, d'après l'énoncé, la série $\sum |d_n|^2$ convergent. On peut donc appliquer le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif à l'inégalité établie ci-dessus. Cela prouve que la série $\sum |c_n|$ est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum c_n$ est absolument convergente.

3. a. Étude sans difficulté. Il est intéressant de mettre en évidence l'axe de symétrie et les tangentes aux deux extrémités du graphe.



REMARQUE.— On rappelle qu'un graphe doit être lisible et légendé...

3. b. Il suffit d'intégrer par parties en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt = 0.$$

3. c. On reprend les notations utilisées plus haut :

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad f'(t) = 2\pi - 2t.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad d_n = \frac{-2i}{n}$$

et d'après **[2.a.]** (puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f(0) = f(2\pi)$),

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad c_n = \frac{-2}{n^2}.$$

Comme $c_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$, la série $\sum c_n$ est bien absolument convergente.

Partie B. Transformée de Fourier

4. L'intégrande

$$\left[t \mapsto f(t)e^{-it/n}\right]$$

est le produit de la fonction f, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, et d'une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.

5. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|f(t)e^{-it/n}\right| = \left|f(t)\right|$$

et comme la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par hypothèse), on déduit de l'Inégalité de la moyenne que

$$|u_n| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-it/n}\right| dt = \int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| dt.$$

Comme le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$, cela prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

6. D'après **[4.]**, les fonctions

$$\varphi_n = \left[t \mapsto f(t)e^{-it/n}\right]$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (y compris pour $t = 0$),

$$\lim_{n\to+\infty} e^{it/n} = e^0 = 1$$

donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f. Enfin, comme on vient de le voir en **[5.]**, la convergence est dominée :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\varphi_n(t)\right| \leqslant \left|f(t)\right|.$$

D'après le Théorème de convergence dominée, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-it/n}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Partie C. Transformée de Laplace

7. Pour $n = 0$, la fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il n'y a aucune raison d'imaginer qu'elle soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Mais, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|f(t)e^{-nt}\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-t}$$

et comme $[t \mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), on conclut que

$$\left[t \mapsto f(t)e^{-nt}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi l'intégrale v_n est bien définie pour $n \geqslant 1$ (et seulement pour $n \geqslant 1$ en général).

8. En intégrant la majoration établie au **[7.]**, on obtient

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 1, \quad |v_n| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(t)e^{-nt}\right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de n, cela prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

9. Soit $n \geqslant 1$. D'après **[7.]**, la fonction

$$\left[t \mapsto f(t)ne^{-nt}\right]$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le changement de variable affine

$$u = nt$$

prouve alors que la fonction

$$\varphi_n = \left[u \mapsto f\Big(\frac{u}{n}\Big)e^{-u}\right]$$

est elle aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(u)\, du = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}n\, dt = w_n.$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, le quotient u/n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Comme f est continue en 0, le Théorème de composition des limites montre que

$$\varphi_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)e^{-u}.$$

Enfin, comme f est bornée, il est clair que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad \left|\varphi_n(u)\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-u}.$$

Le majorant est indépendant de l'indice n et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction de u (fonction intégrable de référence). On vient ainsi d'établir que la convergence est dominée et par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(u)\, du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\, du$$

ce qui revient à

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$

REMARQUE.— En particulier, cela prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (ce qui est plus précis que le résultat du **[8.]**).

Solution II ❀ Solutions bornées d'une équation différentielle

1. a. La fonction f est continue sur $I = [1, +\infty[$, donc la fonction

$$F_a = \left[t \mapsto f(t)e^{-at}\right]$$

est continue sur I. D'autre part, f est bornée sur I, donc

$$f(t)e^{-at} = \mathcal{O}(e^{-at})$$

au voisinage de $+\infty$, donc la fonction F_a est intégrable sur I et, par restriction, elle est intégrable sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in I$. La fonction $U(f)$ est donc bien définie sur I.

❧ Comme F_a est continue sur $I = [1, +\infty[$, alors la fonction

$$\left[x \mapsto \int_1^x F_a(t)\, dt\right]$$

est une primitive sur I de la fonction F_a et donc, en particulier, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (théorème fondamental du calcul intégral).

D'après la relation de Chasles,

$$\forall\, x \in I, \quad U(f)(x) = e^{ax} \int_1^{+\infty} F_a(t)\, dt - e^{ax} \int_1^x F_a(t)\, dt$$

ce qui montre que $U(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}[U(f)]'(x) &= ae^{ax}\int_1^{+\infty} F_a(t)\,dt - ae^{ax}\int_1^{x} F_a(t)\,dt \\ &\quad - e^{ax}F_a(x) \\ &= aU(f)(x) - e^{ax}F_a(x) \\ &= aU(f)(x) - f(x).\end{aligned}$$

1. b. On a montré à la question précédente que $U(f)$ est une solution sur I de l'équation différentielle (E_f).

❧ Comme la fonction F_a est intégrable sur I, on déduit de l'inégalité de la moyenne que

$$\forall\, x \in I, \quad \left|U(f)(x)\right| \leqslant e^{ax}\int_x^{+\infty} \left|e^{-at}f(t)\right| dt.$$

La fonction f est bornée sur I et la borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, t \in I, \quad \left|f(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

et par conséquent,

$$\forall\, t \in I, \quad \left|e^{-at}f(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{-at}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x \in I, \quad \left|U(f)(x)\right| \leqslant \|f\|_\infty\, e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{\|f\|_\infty}{a},$$

donc la fonction $U(f)$ est bornée sur I et, par passage au sup,

$$\left\|U(f)\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{a}\|f\|_\infty.$$

❧ Soit $V(f)$, une solution de (E_f) bornée sur I. Alors $U(f)-V(f)$ est une fonction bornée sur I qui vérifie l'équation homogène

$$\forall\, x \in I, \quad y'(x) - ay(x) = 0.$$

La solution générale de l'équation homogène ayant pour expression

$$y(x) = Ae^{ax},$$

on en déduit que $A = 0$ et donc que $V(f) = U(f)$.

❧ La fonction $U(f)$ est donc bien l'unique solution de l'équation (E_f) qui soit bornée sur I.

2. L'application $U(f)$ est bien définie pour tout $f \in E$, continue (car de classe $\mathscr{C}^1$) et bornée sur I d'après **1.b.**, donc elle appartient à E.

La linéarité de U est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale sur l'espace des fonctions intégrables sur I.

L'application U est donc un endomorphisme de E.

❧ Si $U(f)$ est l'application nulle, l'équation (E_f) admet une solution identiquement nulle sur I, donc f est identiquement nulle sur I. L'endomorphisme U est donc injectif.

Remarque. *Il existe évidemment des applications* f *continues et bornées sur* I *qui ne sont pas de classe* $\mathscr{C}^1$, *donc* U *n'est pas surjectif.*

Partie A. Comportement de U sur des sous-espaces vectoriels de dimension finie

3. a. Il est clair que f_k est continue et bornée sur I et donc que $f_k \in E$. On vérifie que

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k.$$

3. b. Pour tout réel λ tel que

$$0 < \lambda \leqslant \frac{1}{a},$$

il existe un, et un seul, réel $k \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lambda = \frac{1}{a+k}$$

(il s'agit de $k = (1-a\lambda)/\lambda$) et la fonction f_k appartient à $\mathrm{Ker}(U - \lambda I_E)$, qui n'est donc pas réduit au vecteur nul.

Réciproquement, si $f \in E$ appartient à $\mathrm{Ker}(U - \lambda I_E)$, alors $U(f) = \lambda f$ et

$$\forall\, x \in I, \quad \lambda f'(x) - a\lambda f(x) = -f(x)$$

d'après (E_f). On en déduit que

$$\forall\, x \in I, \quad f'(x) + \frac{1-a\lambda}{\lambda}f(x) = 0$$

et donc que f est proportionnelle à f_k pour

$$k = \frac{1-a\lambda}{\lambda}.$$

Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(U - \lambda I_E) = 1$ pour tout réel λ tel que $0 < a\lambda \leqslant 1$.

3. c. Puisque

$$U(f_k) = \frac{1}{a+k}f_k,$$

une récurrence immédiate montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n}f_k.$$

❧ Par conséquent, lorsque n tend vers $+\infty$, la quantité $U^n(f_k)(x)$ tend

— vers 0 si $k > 1 - a$;
— vers $f_k(x) = e^{(a-1)x}$ si $k = 1 - a$;
— vers $+\infty$ si $0 \leqslant k < 1 - a$.

4. a. Pour tout $a > 0$ et tout $x \geqslant 1$,

$$\int_x^{+\infty} e^{(i-a)t}\,dt = \frac{e^{-ax}[a\cos x - \sin x + i(\cos x + a\sin x)]}{a^2+1}.$$

En particulier, pour $a = 1$,

$$U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2} \quad \text{et} \quad U(\cos) = \frac{-\sin + \cos}{2},$$

donc le plan $P = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est stable par U et U_P est l'endomorphisme de P induit par restriction de U.

Remarque. *D'après* **1.b.**, *la fonction* $U(\cos)$ *(resp.* $U(\sin)$*) est une solution particulière bornée de* $(B_{\cos})$ *(resp. de* $(B_{\sin})$*) et une telle solution, d'après le cours de Première année, est une combinaison linéaire de* cos *et de* sin *— combinaison linéaire qu'il est facile d'expliciter pour exprimer* $U(\cos)$ *et* $U(\sin)$.

---

4. b.

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

avec $\theta = \pi/4$.

4. c. Les puissances d'une matrice de rotation plane sont évidentes à calculer. Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad M^n = \frac{1}{2^{n/2}}\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

et la matrice M^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

5. a. La famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre si, et seulement si, la famille $(\varphi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

Considérons donc une famille $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de scalaires tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{-t} t^k = 0.$$

On en déduit que l'expression polynomiale

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$$

admet une infinité de zéros et par conséquent que tous les scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont nuls.

La famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une famille libre, évidemment constituée de vecteurs de E.

5. b. En intégrant par parties,

$$\forall\, x \in I,\quad U(\varphi_{n-1})(x) = -\frac{x^n e^{-x}}{n} + \frac{a+1}{n} U(\varphi_n)(x)$$

ou encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad nU(\varphi_{n-1}) = -\varphi_n + (a+1)U(\varphi_n).$$

5. c. Comme $\varphi_0 = f_1$, alors $U(\varphi_0) \in \mathbb{R}\cdot\varphi_0$ (d'après **3.a.**), ce qui montre que le sous-espace F_0 est stable par U.

Supposons que, pour un entier $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace F_p soit stable par U. Alors

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant p,\quad U(\varphi_k) \in F_p \subset F_{p+1}$$

et d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} U(\varphi_{p+1}) &= \frac{p+1}{a+1} U(\varphi_p) + \frac{1}{a+1}\varphi_{p+1} \\ &\in F_p + \mathbb{R}\cdot\varphi_{p+1} = F_{p+1}, \end{aligned}$$

donc F_{p+1} est stable par U.

On a ainsi démontré par récurrence que les sous-espaces F_p sont stables par U pour tout $p \in \mathbb{N}$.

5. d. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} U(\varphi_0) &= \frac{1}{a+1}\varphi_0 \\ U(\varphi_1) &= \frac{1}{(a+1)^2}\varphi_0 + \frac{1}{a+1}\varphi_1 \\ U(\varphi_2) &= \frac{2}{(a+1)^3}\varphi_0 + \frac{2}{(a+1)^2}\varphi_1 + \frac{1}{a+1}\varphi_2 \end{aligned}$$

et donc

$$T = \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{a+1} & \dfrac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ La matrice T est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Son spectre est donc réduit à $\{1/1+a\}$ et comme le sous-espace propre associé est la droite engendrée par $\langle 1, 0, 0 \rangle$, la matrice T n'est pas diagonalisable.

5. e. Notons $\lambda = 1/1+a$. La matrice $(T - \lambda I_3)$ est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. On vérifie facilement que

$$(T - \lambda I_3)^2 = \frac{1}{(1+a)^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $(T - \lambda I_3)^3 = 0$. Par conséquent, $(X - \lambda)^3$ est un polynôme annulateur unitaire de T.

Le polynôme minimal de T est donc un diviseur unitaire $(X - \lambda)^3$; il est distinct de 1 (un polynôme minimal n'est jamais constant); distinct de $(X - \lambda)$ et de $(X - \lambda)^2$ (qui ne sont pas annulateurs); donc il est égal à $(X - \lambda)^3$.

5. f. En calculant T^2 et T^3, on conjecture que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad T^n = \frac{1}{(a+1)^n}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{a+1} & \dfrac{n(n+1)}{(a+1)^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{2n}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qu'il est facile de vérifier par récurrence.

❧ Comme $a > 0$, on en déduit que la matrice T^n tend vers la matrice nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B. Propriétés analytiques de U

6. Commençons par le commencement et justifions que les intégrales existent au sens propre.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ fixés, la fonction

$$\left[t \mapsto (t-x)^n e^{-at} f(t)\right]$$

est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ qui contient l'intervalle d'intégration $[x, +\infty[$. Comme f est bornée, on en déduit que

$$\begin{aligned} (t-x)^n e^{-at} f(t) &= \mathcal{O}(t^n e^{-at}) = \mathcal{O}(t^n e^{-at/2} e^{-at/2}) \\ &= o(e^{-at/2}) \end{aligned}$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Comme $a/2 > 0$, cette fonction est bien intégrable sur $[x, +\infty[$.

❧ Procédons maintenant par récurrence.

H.R. *On suppose qu'il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que*

$$U^n(g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} g(t)\, dt$$

pour tout $x \in I$ *et tout* $g \in E$.

L'hypothèse de récurrence est vraie pour $n = 1$ par définition de U.

Si elle est vraie pour un rang $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}U^{n+1}(f)(x) &= U^n\big(U(f)\big)(x)\\ &= e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}U(f)(t)\,dt\end{aligned}$$

pour tout $f \in E$ et tout $x \in I$. On intègre alors par parties, en remarquant que

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{(t-x)^n}{n!}\Big) = \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et que, d'après **1.b.**,

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-at}U(f)(t)\big) = -e^{-at}f(t).$$

Pour tout $A \geqslant x$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\int_x^A\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}U(f)(t)\,dt\\ &\quad= \frac{(A-x)^n}{n!}e^{-aA}U(f)(A) + \int_x^A\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt\end{aligned}$$

et comme $U(f)$ est bornée sur I, on en déduit (en faisant tendre A vers $+\infty$) que

$$U^{n+1}(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt$$

pour tout $x \in I$ et tout $f \in E$.

La propriété est ainsi démontrée par récurrence.

7. Tout d'abord, on sait que $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (par **1.a.**) et on suppose que $f' \in E$, donc les deux applications $U(f')$ et $[U(f)]'$ existent bien.

Intégrons par parties. Pour tout $A > x$,

$$\int_x^A e^{-at}f'(t)\,dt = \big[e^{-at}f(t)\big]_x^A + a\int_x^A e^{-at}f(t)\,dt$$

et comme f est bornée sur I, on en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in I,\quad e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f'(t)\,dt &= -f(x) + aU(f)(x)\\ &= \big[U(f)\big]'(x)\end{aligned}$$

d'après **1.b.**

8. a. Il suffit d'effectuer le changement de variable *affine* (donc licite) $[t \leftarrow t-x]$.

8. b. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\big|U(f)(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty}e^{-at}\big|f(x+t)\big|\,dt = U\big(|f|\big)(x)$$

pour tout $x \in I$.

8. c. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $1 \leqslant x \leqslant y$. Alors $x+t \leqslant y+t$ et comme f est décroissante et positive,

$$0 \leqslant f(y+t) \leqslant f(x+t) \leqslant f(x),$$

donc

$$0 \leqslant e^{-at}f(y+t) \leqslant e^{-at}f(x+t) \leqslant e^{-at}f(x)$$

et en intégrant pour $t \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$0 \leqslant U(f)(y) \leqslant U(f)(x) \leqslant \frac{f(x)}{a}.$$

Donc $U(f)$ est bien une fonction décroissante et positive et

$$\forall\, x \in I,\quad aU(f)(x) \leqslant f(x).$$

Partie C. Étude asymptotique de $U(f)$

9. Posons $\alpha(t) = e^{-at}f(t)$ et $\beta(t) = e^{-at}$: l'application α est continue sur I et l'application β (fonction de référence) est strictement positive et intégrable sur I.

❧ Si f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, alors

$$\alpha(t) = o\big(\beta(t)\big)$$

au voisinage de $+\infty$, donc (théorème d'intégration des relations de comparaison)

$$\int_x^{+\infty}\alpha(t)\,dt = o\Big(\int_x^{+\infty}\beta(t)\,dt\Big) = o(e^{-ax})$$

et donc

$$U(f)(x) = o(1)$$

ce qui signifie que $U(f)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

❧ Supposons que f tende vers une limite b *non nulle* au voisinage de $+\infty$. Alors

$$\alpha(t) \sim b\beta(t),$$

donc

$$\int_x^{+\infty}\alpha(t)\,dt \sim \Big(\int_x^{+\infty}b\beta(t)\,dt\Big) \sim \frac{b}{a}e^{-ax}$$

et donc

$$U(f)(x) \sim \frac{b}{a}$$

ce qui signifie que $U(f)$ tend vers b/a au voisinage de $+\infty$.

❧ Ainsi, quel que soit $b \in \mathbb{R}$, si la fonction $f \in E$ tend vers b au voisinage de $+\infty$, alors $U(f)$ tend vers b/a au voisinage de $+\infty$.

10. a. Pour tout $\omega > 0$, la fonction g_ω appartient à E, donc h_ω est bien définie.

❧ Une nouvelle intégration par parties montre que

$$\forall\, x \in I,\quad h_\omega(x) = \frac{1}{a}g_\omega(x) - \frac{\omega}{a}h_{\omega+1}(x).$$

❧ Comme on l'a dit, la fonction (de référence)

$$\beta = \big[t \mapsto g_\omega(t)e^{-at}\big]$$

est intégrable sur I et de plus, elle est strictement positive sur I. Il est clair que la fonction

$$\alpha = \big[t \mapsto g_{\omega+1}(t)e^{-at}\big]$$

est continue sur I et que

$$\alpha(t) = o\big(\beta(t)\big)$$

au voisinage de $+\infty$. On peut donc intégrer cette relation de comparaison :

$$h_{\omega+1}(x) = U(\alpha)(x) = o\big(U(\beta)(x)\big) = o\big(h_\omega(x)\big)$$

et déduire de la relation précédente que

$$\frac{1}{a} g_\omega(x) = h_\omega(x) + o\big(h_\omega(x)\big)$$

et donc que

$$h_\omega(x) \sim \frac{1}{a} g_\omega(x)$$

au voisinage de $+\infty$.

10. b. On a démontré que la fonction (de référence)

$$\beta = \big[t \mapsto g_\omega(t) e^{-at}\big]$$

était positive et intégrable sur I. La fonction

$$\alpha = \big[t \mapsto f(t) e^{-at}\big]$$

est continue et on suppose ici que

$$\alpha(t) \sim \beta(t)$$

au voisinage de $+\infty$. Par conséquent,

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \sim \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt$$

et donc

$$U(f)(x) \sim h_\omega(x)$$

au voisinage de $+\infty$. On déduit alors de la question précédente que

$$U(f)(x) \sim \frac{1}{a} g_\omega(x) \sim \frac{1}{a} f(x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. a. On applique l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction $f = [t \mapsto e^t]$ sur le segment $[0 \leftrightarrow u]$.

La longueur de ce segment est égale à $|u|$.

La dérivée $(n+1)$-ième de f, égale à exp, est positive et majorée sur ce segment par 1 (si $u < 0$) ou par e^u (si $u \geqslant 0$), donc majorée par $C = e^{|u|}$ (quel que soit le signe de u).

❧ Par croissances comparées, le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (le réel u restant fixé). Cela prouve la convergence de la série et que la somme de cette série est bien égale à e^u.

11. b. On déduit de **11.a.** que, pour tout $x \in I$,

$$\forall\, t \in [1, x], \quad \frac{e^{-at}}{t} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} = \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!}$$

et donc que la série de fonctions

$$\sum \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!}$$

converge simplement sur le segment $[1, x]$. La somme de cette série de fonctions, égale à

$$\frac{e^{-at} - 1}{t},$$

est continue sur ce segment et la série de terme général

$$\int_1^x \left| \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!} \right| dt = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{x^{k+1} - 1}{k+1}$$

est absolument convergente (règle de D'Alembert) : on peut appliquer ici le théorème d'intégration terme à terme, qui donne

$$\int_1^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^{k+1} t^k}{(k+1)!}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k (x^k - 1)}{k! \cdot k}.$$

Le résultat voulu découle alors de la linéarité de l'intégrale.

11. c. On prend $a = 1$ dans cette question.

La fonction $[t \mapsto e^{-t}/t]$ est clairement positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ et d'après la relation de Chasles,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt}_{K>0} - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \sim \frac{1}{x}$$

d'après **10.a.** (avec $\omega = 1$) et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} + o\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big).$$

On déduit alors de la question précédente que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} = -\ell n\, x + K - \frac{e^{-x}}{x} + o(e^{-x}/x)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

11. d. Ce développement repose sur une estimation de h_1. On peut donc exploiter les résultats du **10.a.** :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad h_k = g_k - k h_{k+1}$$

en sachant que

$$h_{k+1} \sim g_{k+1} = o(g_k).$$

On obtient ainsi de proche en proche une expression développée arbitrairement précise de h_1, par exemple :

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 - h_2 \\ &= g_1 - (g_2 - 2h_3) \\ &= g_1 - g_2 + 2(g_3 - 3h_4) \\ &= g_1 - g_2 + 2g_3 - 6g_4 + o(g_4) \end{aligned}$$

d'où on tire

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x^k - 1)}{k \cdot k!} = -\ell n\, x + K - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - 2\frac{e^{-x}}{x^3} + 6\frac{e^{-x}}{x^4} + o(e^{-x}/x^4)$$

Cette précision est illusoire si on n'est pas en mesure de calculer une valeur approchée arbitrairement précise de la constante K.