18
Endomorphismes d'un espace euclidien

1. ✍ *Un **espace euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.*

2. Dans la suite de ce chapitre, $\big(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,)\big)$ désigne toujours un espace euclidien.

3. Rappels sur la réduction des endomorphismes
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.
3.1 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels stables par u, alors $F+G$ et $F\cap G$ sont stables par u.
3.2 Si P est un polynôme annulateur de u, irréductible et unitaire, alors P est le polynôme minimal de u.
3.3 Si le produit PQ est un polynôme annulateur de u et si $P(u)$ est injectif, alors

$$\forall\, x \in E, \quad (PQ)(u)(x) = 0_E = P(u)\big(Q(u)(x)\big)$$

et Q est un polynôme annulateur de u.
3.4 Si P est un diviseur non constant du polynôme minimal de u, alors le sous-espace $\operatorname{Ker} P(u)$ contient un vecteur $x_0 \neq 0_E$.
3.5 L'endomorphisme u n'a pas de vecteur propre dans le sous-espace vectoriel

$$F = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{I}_E)\Big)^{\perp}.$$

Par suite, si F est stable par u, alors le spectre de l'endomorphisme u_F induit par restriction de u à F est vide.

I
Structure euclidienne

4. Structure définie par un produit scalaire
La première manière de définir une structure euclidienne sur un espace vectoriel E consiste à définir explicitement un produit scalaire sur E.
Parmi les bases de E, seules les bases orthonormées sont alors vraiment intéressantes. →**[6]**

5. Structure définie par une base
L'autre manière de définir une structure euclidienne consiste à choisir une base de référence et décider que cette base sera orthonormée, ce qui définit implicitement un, et un seul, produit scalaire sur E.
C'est ainsi qu'est définie, sur chaque espace qui admet une base canonique, une structure euclidienne canonique.
5.1 Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E. Il existe une, et une seule, famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de formes linéaires sur E définies par :

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)\cdot e_k.$$

Ces formes linéaires sont appelées **formes linéaires coordonnées relatives à la base** $\mathscr{B}$.
5.2 Pour toute forme linéaire φ sur E,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\cdot e_k^*$$

et comme

$$\forall\, 1\leqslant i,j\leqslant n, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j},$$

la famille $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace $\mathrm{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E, dite **base duale** de $\mathscr{B}$.
5.3 L'application définie par

$$\forall\, (x,y) \in E\times E, \quad (\,x\,|\,y\,) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k^*(y)$$

est l'unique produit scalaire sur E tel que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormée.
5.4 ✍ **Structure euclidienne canonique**
*L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa **structure euclidienne canonique** lorsque la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.*

I.1 Calcul dans une base orthonormée

6. On sait que **[17.63]** tout espace euclidien admet une base orthonormée et on considère ici une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$\forall\, 1\leqslant i,j\leqslant n, \quad (\,e_i\,|\,e_j\,) = \delta_{i,j}.$$

6.1 Coordonnées d'un vecteur
Les coordonnées d'un vecteur x relatives à la base orthonormée $\mathscr{B}$ se calculent par un produit scalaire :

$$\forall\, 1\leqslant k\leqslant n, \qquad x_k = (\,e_k\,|\,x\,)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x\in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (\,e_k\,|\,x\,)\cdot e_k.$$

6.2 Expression de la norme

$$\forall\, x\in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\,e_k\,|\,x\,)^2.$$

6.3 Expression du produit scalaire

$$\forall\, (x,y)\in E\times E, \quad (\,x\,|\,y\,) = \sum_{k=1}^{n} (\,x\,|\,e_k\,)\,(\,e_k\,|\,y\,) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

6.4 Matrice et trace d'un endomorphisme

$$\forall\, u\in \mathrm{L}(E), \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \Big(\,(\,e_i\,|\,u(e_j)\,)\,\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \big(\,e_k\,|\,u(e_k)\,\big).$$

Représentation des formes linéaires

7. Soit $\big(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,)\big)$, un espace euclidien. Pour tout vecteur $a\in E$, on pose

$$\varphi_a = [x \mapsto (\,a\,|\,x\,)\,].$$

7.1 L'application φ_a est une forme linéaire sur E, dont le noyau est $(\mathbb{R}\cdot a)^{\perp}$.
7.2 Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors

$$a = \sum_{k=1}^{n} \varphi_a(e_k)\cdot e_k.$$

7.3 Théorème de Riesz
Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un, et un seul, vecteur $a\in E$ tel que

$$\forall\, x\in E, \quad \varphi(x) = (\,a\,|\,x\,).$$

I.2 Sommes directes orthogonales

8. Soit F, un sous-espace de l'espace euclidien E.

8.1 Un sous-espace H est orthogonal à F si, et seulement si, il est contenu dans l'orthogonal de F [**17.33.3**].

8.2 Le sous-espace F admet [**17.66.3**] un supplémentaire orthogonal :

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

et, en particulier,

$$\dim F^{\perp} = \operatorname{codim} F \quad \text{et} \quad (F^{\perp})^{\perp} = F.$$

8.3 Quel que soit le sous-espace G,

$$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

8.4 Si G est un sous-espace de F, alors

$$F = G \overset{\perp}{\oplus} (G^{\perp} \cap F) = G \overset{\perp}{\oplus} (F^{\perp} \oplus G)^{\perp}.$$

9. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ est une base orthonormée du sous-espace F, alors

$$\sum_{k=1}^{r} (\, \varepsilon_k \,|\, x \,) \cdot \varepsilon_k$$

est le projeté orthogonal de x sur F [**17.54.2**].

Entraînement

10. Questions pour réfléchir

1. Généraliser le théorème [**5.3**] au cas où E est un espace vectoriel de dimension dénombrable.
2. Soient V, un espace de dimension finie ; φ et ψ, deux produits scalaires sur V. S'il existe une base $\mathscr{B}$ de V qui est orthonormée à la fois pour φ et ψ, alors $\varphi = \psi$.
3. Comparer l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée de E avec l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
4. Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E, alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} (F^{\perp} \cap G^{\perp}).$$

Exprimer les projections relatives à cette décomposition en somme directe en fonction d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de G.

11. *Suite de* [**5.1**] – Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors la base duale de $\mathscr{B}$ est reliée à la base $\mathscr{B}$ par :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k^* = [x \mapsto (\, e_k \,|\, x \,)].$$

12. Soit $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, une famille de vecteurs de E. Les formes linéaires $\varphi_k = [x \mapsto (\, y_k \,|\, x \,)]$ sont liées si, et seulement si, la famille $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ est liée et $\operatorname{rg}(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant r} = \operatorname{rg}(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$.

13. Équation normale d'un hyperplan

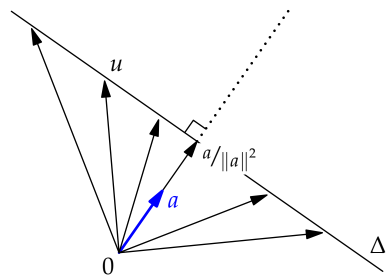
Dans un espace euclidien, un hyperplan H peut être considéré comme l'orthogonal de la droite $H^{\perp}$ ou comme le noyau d'une forme linéaire φ. Dans le second cas, il est utile d'appliquer le théorème de Riesz [**7.3**].

13.1 Soit Δ, une droite affine de l'espace $\mathbb{R}^2$, muni d'un produit scalaire quelconque φ.
Il existe un, et un seul, vecteur $a \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u \in \Delta \iff \varphi(a, u) = 1$$

si, et seulement si, la droite Δ ne passe pas par l'origine. Ce vecteur a est normal à la droite Δ et

$$\Delta = \frac{a}{\|a\|^2} + (\mathbb{R} \cdot a)^{\perp}.$$



13.2 Soit Π, un plan affine de l'espace $\mathbb{R}^3$, muni d'un produit scalaire quelconque φ.
Il existe un, et un seul, vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u \in \Pi \iff \varphi(a, u) = 1$$

si, et seulement si, le plan Π ne passe pas par l'origine. Ce vecteur a est normal au plan Π.

13.3 Pour tout hyperplan H de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \in H \iff \operatorname{tr}(AM) = 0.$$

Discuter l'unicité de la matrice A.

14. Extremum sous contrainte

Soient φ, un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N, la norme qui lui est associée. On cherche le maximum de la fonction définie par

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^2, \quad f(u) = \exp\big[-N^2(u)\big]$$

lorsque u parcourt une droite Δ.

1. Si Δ ne passe pas par l'origine, alors [**13.1**]

$$\max_{u \in \Delta} f(u) = \exp\big(-1/\big[N(a)\big]^2\big).$$

2. Et si Δ contient l'origine ?
3. Application :

$$\sup_{x+y=1} \exp(-x^2 - 2y^2) = \exp(-2/3)$$

$$\inf_{x+y=1} \exp(-x^2 - 2y^2) = 0$$

15. Adjoint d'un endomorphisme [**7.3**]

Soit u, un endomorphisme d'un espace euclidien E.

15.1 Si

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big) = 0,$$

alors u est l'endomorphisme nul.

15.2 Soit v, un endomorphisme de E tel que

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, u(x) \,\big|\, y \,\big) = \big(\, v(x) \,\big|\, y \,\big).$$

Alors $u = v$.

15.3 Pour tout $x \in E$, l'application $\big[y \mapsto \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big)\big]$ est une forme linéaire sur E. Il existe un, et un seul, endomorphisme v de E tel que

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(y) \,\big) = \big(\, v(x) \,\big|\, y \,\big).$$

Cet endomorphisme est appelé **adjoint** de u et noté u^*.

15.4 Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. Si $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$, alors $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^t A$.

15.5 Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, deux bases orthonormées de E. La somme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \big(\, u(e_i) \,\big|\, \varepsilon_j \,\big)^2$$

est égale [**6.4**] à la trace de $u^* \circ u$ et donc indépendante du choix de $\mathscr{B}$ et de $\mathscr{B}'$.

16. Un adjoint en dimension infinie
L'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application v définie par

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad v(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme tel que $\|v(f)\| \leqslant \|f\|$ pour tout $f \in E$.

2. Il existe un, et un seul, endomorphisme w de E tel que

$$\forall\, f,g \in E, \quad (v(f) \mid g) = (f \mid w(g))$$

et cet endomorphisme est défini par

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,1], \quad w(f)(x) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

17. Soit $(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_d)$, une base de $E = \mathbb{R}_d[X]$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telles que $\|P_n\|$ tende vers 0.

1.
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad (\varepsilon_k \mid P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.
$$P_n(0) = \sum_{k=0}^{d} (\varepsilon_k \mid P_n)\,\varepsilon_k(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

II

Endomorphismes symétriques

18.1 ✍ *Un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ est dit **symétrique** lorsque*

$$\forall\, (x,y) \in E\times E, \quad \big(u(x) \,\big|\, y\big) = \big(x \,\big|\, u(y)\big)$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est noté $\mathcal{S}(E)$.
18.2 ➞ *L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$.*

II.1 Représentation matricielle

19. Soit $(e_1,\dots,e_n)$, une base de E. Un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \big(e_i \,\big|\, u(e_j)\big) = \big(u(e_i) \,\big|\, e_j\big).$$

20. ➞ *Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.*
20.1 *Si u est un endomorphisme symétrique, alors la matrice de u relative à une base orthonormée quelconque est une matrice symétrique.*
20.2 *S'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique, alors u est un endomorphisme symétrique.*
20.3 *S'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour u, alors u est un endomorphisme symétrique.*
21. ➞ *Si $\dim E = n$, alors*

$$\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

22. Exemples géométriques
22.1 Soit $p \in \mathrm{L}(E)$, un projecteur. Alors p est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, p est un projecteur orthogonal [**17.46.3**].
22.2 Soient p, un projecteur et s, la symétrie définie par

$$2p = \mathrm{I}_E + s.$$

Alors $p \in \mathcal{S}(E)$ si, et seulement si, $s \in \mathcal{S}(E)$.
22.3 Une symétrie $s \in \mathrm{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique si, et seulement si, c'est une symétrie orthogonale [**78**].

II.2 Réduction des endomorphismes symétriques

23. On étudie ici un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$.
24. Sous-espaces stables
24.1 ➞ *L'endomorphisme induit par restriction de $u \in \mathcal{S}(E)$ à un sous-espace F stable par u est un endomorphisme symétrique de F.*
24.2 Si $u(x)$ et y sont orthogonaux, alors x et $u(y)$ sont orthogonaux.
24.3 ➞ *Si u est un endomorphisme symétrique de E, alors*

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u.$$

24.4 ➞ *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.*
24.5 ➞ *Si F est un sous-espace stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^{\perp}$ est stable par u.*
25. Polynôme minimal
25.1 On considère une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et un vecteur propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de M associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda^t\overline{X}X = {}^t\overline{(MX)}X = {}^tX\overline{(MX)} = \overline{\lambda}{}^tX\overline{X}$$

25.2 ➞ *Le polynôme minimal d'un endomorphisme symétrique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.* →[**117**]
26. Versions géométriques du théorème spectral
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
26.1 Si V est un sous-espace stable par u de dimension supérieure à 1, alors il contient un vecteur propre de u.
26.2 Si V_1, …, V_r sont les sous-espaces propres de u, alors le sous-espace

$$F = \Big[V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_r\Big]^{\perp}$$

est stable par u mais ne contient aucun vecteur propre de u.
26.3 ➞ *Tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E est diagonalisable et*

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}} \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}_E).$$

26.4 Décomposition spectrale
Pour tout endomorphisme symétrique u,

$$u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \lambda\cdot p_\lambda$$

où p_λ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{I}_E)$, sous-espace propre de u associé à λ. →[**30.3**]

Versions vectorielles du théorème spectral

27. ➞ *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.*
28. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, une base orthonormée de vecteurs propres de u. On suppose que les valeurs propres de u sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

28.1 Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k \mid x)\cdot\varepsilon_k \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(\varepsilon_k \mid x)\cdot\varepsilon_k.$$

28.2 Comme

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k \mid x)^2,$$

alors

$$\lambda_1\,\|x\|^2 \leqslant \big(x \,\big|\, u(x)\big) \leqslant \lambda_n\,\|x\|^2.$$

29. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
29.1 ➔ *Pour tout $x \in E$, il existe une famille orthogonale $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ de vecteurs de E telle que*

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda$$

et que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad x_\lambda \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \cdot \mathrm{I}_E).$$

29.2 En particulier,

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2 \quad \text{et} \quad u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \cdot x_\lambda.$$

29.3 On en déduit que

$$\big(x \,\big|\, u(x) \big) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \, \|x_\lambda\|^2$$

et que

$$\big\|u(x)\big\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2 \leqslant \Big(\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|^2 \Big) \, \|x\|^2.$$

30. Versions matricielles du théorème spectral
30.1 ➔ *Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u)$ soit diagonale.*
30.2 ➔ *Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.*
30.3 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k {}^tX_k$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à ε_k et $X_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_k)$.
30.4 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthogonale de E constituée de vecteurs propres de u. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{Y_k {}^tY_k}{{}^tY_k Y_k}$$

où λ_k est la valeur propre de u associée à e_k et $Y_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(e_k)$.

II.3 Endomorphismes symétriques positifs

31.1 ✍ *Un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ est **positif*** lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \big(x \,\big|\, u(x) \big) \geqslant 0.$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de l'espace E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.
31.2 Un endomorphisme symétrique u est positif si, et seulement si, pour tout $x \in E$, l'angle formé par le couple $\big(x, u(x)\big)$ est un angle aigu.
31.3 ✍ *Un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ est **négatif*** lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \big(x \,\big|\, u(x) \big) \leqslant 0.$$

31.4 ✍ *Un endomorphisme symétrique $u \in \mathrm{L}(E)$ est **défini positif*** lorsque*

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \big(x \,\big|\, u(x) \big) > 0.$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de E est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.
31.5 Un endomorphisme symétrique défini positif est positif et inversible.

31.6 ✍ *Un endomorphisme symétrique $u \in \mathrm{L}(E)$ est **défini négatif*** lorsque*

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \big(x \,\big|\, u(x) \big) < 0.$$

32.1 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive*** lorsque*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad {}^tXAX \geqslant 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
32.2 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **négative*** lorsque*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad {}^tXAX \leqslant 0.$$

32.3 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **définie positive*** lorsque*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad {}^tXAX > 0.$$

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
32.4 ✍ *Une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **définie négative*** lorsque*

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad {}^tXAX < 0.$$

33. Les définitions vectorielles **[31]** et matricielles **[32]** sont analogues et on peut préciser cette analogie grâce à **[20]**.
33.1 Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathscr{B}$, une base orthonormée quelconque de E. Si u est positif (resp. défini positif ; négatif ; défini négatif), alors sa matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique et positive (resp. définie positive ; négative ; définie négative).
33.2 Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. S'il existe une base orthonormée de E telle que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit symétrique et positive (resp. définie positive ; négative ; définie négative), alors u est un endomorphisme symétrique positif (resp. défini positif ; négatif ; défini négatif).

34. Exemples et contre-exemples
34.1 $\mathrm{I}_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$
34.2 Un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique positif, mais n'est pas défini positif en général.
34.3 Une symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique qui n'est pas positif en général.
34.4 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $B = {}^tAA$ et $C = A{}^tA$ sont des matrices symétriques positives :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXBX = \|AX\|^2 \quad \text{et} \quad {}^tXCX = \|{}^tAX\|^2.$$

Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont définies positives si, et seulement si, la matrice A est inversible.

35. Caractérisations spectrales
On note $\Sigma^1 = [\|x\| = 1]$, la sphère unité de E et on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$, dont les valeurs propres sont rangées par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r.$$

35.1 *Suite de* **[29.2]** –

$$\lambda_1 = \min_{x \in \Sigma^1} \big(x \,\big|\, u(x) \big), \qquad \lambda_r = \max_{x \in \Sigma^1} \big(x \,\big|\, u(x) \big)$$

35.2 ➔ *Un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ est :*
1. *positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives ;*
2. *défini positif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement positives ;*
3. *négatif si, et seulement si, ses valeurs propres sont négatives ;*
4. *défini négatif si, et seulement si, ses valeurs propres sont strictement négatives.*

36.

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \quad (\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A)$$

II.4 Caractérisation des produits scalaires

37. On considère un espace euclidien E : sur cet espace est défini un produit scalaire de référence : $(\cdot \mid \cdot)$ et une norme, notée $\|\cdot\|$, est associée à ce produit scalaire.
Nous allons maintenant nous intéresser aux autres produits scalaires définis sur E et à comparer la structure euclidienne associée à un produit scalaire φ à la structure euclidienne de référence (celle qui est associée à $(\cdot \mid \cdot)$).

38. Représentation matricielle d'un produit scalaire
Soit φ, un produit scalaire quelconque sur E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base de E.
38.1 La **matrice du produit scalaire** φ relative à la base $\mathscr{B}$ est la matrice A définie par

$$A = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

On dit aussi que cette matrice est la **matrice de Gram** de la famille $\mathscr{B}$ relative au produit scalaire φ.
38.2 La matrice A est égale à I_n si, et seulement si, la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire φ.
38.3 Quels que soient les vecteurs x et y de E, respectivement représentés par les colonnes X et Y dans la base $\mathscr{B}$,

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY.$$

38.4 La matrice A du produit scalaire φ relative à $\mathscr{B}$ est une matrice symétrique définie positive.
38.5 Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$. La matrice $A' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$ s'exprime en fonction de la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ par la relation suivante :

$$A' = {}^tQAQ.$$

39. Produit scalaire associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive.
39.1 L'application

$$\psi_A = \big[(X, Y) \mapsto {}^tXAY\big]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
39.2 Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E, il existe un produit scalaire φ sur E tel que $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.

40. Produit scalaire associé à un automorphisme de E
Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$.
40.1 L'application

$$\varphi_u = \big[(x, y) \mapsto \big(u(x) \,\big|\, u(y)\big)\big]$$

est un produit scalaire sur E.
40.2 Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E pour le produit scalaire de référence $(\cdot \mid \cdot)$. Si $P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors la matrice de φ_u relative à $\mathscr{B}$ est égale à ${}^tPP$.

41. Factorisation d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
41.1 D'après le théorème spectral et [**35**], il existe une matrice inversible P telle que $A = {}^tPP$.
41.2 En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt au produit scalaire ψ_A [**39.1**], on prouve l'existence d'une matrice triangulaire inversible P telle que $A = {}^tPP$.
41.3 Tout produit scalaire sur E est de la forme φ_u [**40**].

42. Soit φ, un produit scalaire sur E. Notons $\varphi_0 = (\cdot \mid \cdot)$, le produit scalaire de référence.
42.1 Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour φ_0, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

42.2 Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telle que

$${}^tQAQ = \Delta.$$

42.3 La matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une base $\mathscr{B}$. Comme →[**38.5**]

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Delta,$$

alors la base $\mathscr{B}$ est simultanément une base orthonormée pour φ_0 et une base orthogonale pour φ.
42.4 Pour tout endomorphisme u, il existe une base orthonormée $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E telle que

$$\forall\, i \neq j, \quad \big(u(e_i) \,\big|\, u(e_j)\big) = 0.$$

Entraînement

43. Questions pour réfléchir

1. Si M est une matrice symétrique et s'il existe une matrice orthogonale P telle que

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

alors $B = 0$ et les matrices A_1 et A_2 sont symétriques. (Par un calcul direct ou en appliquant [**24.5**] et [**24.1**].)

2. *Suite de* [**24.5**] – On suppose que $\dim E = 2$ et que x est un vecteur propre unitaire de $u \in \mathcal{S}(E)$. Si y est un vecteur unitaire orthogonal à x, alors (x, y) est une base orthonormée de vecteurs propres de u.

3. Un endomorphisme $u \in \mathrm{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si,

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

4. *Suite de* [**29.2**] –

$$\min_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\big(u(x) \,\big|\, x\big)}{\|x\|^2} = \lambda_1 \qquad \max_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\big(u(x) \,\big|\, x\big)}{\|x\|^2} = \lambda_r$$

5. Un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

6. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice diagonale Δ, combien existe-t-il de matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tPAP = \Delta$?

7. La matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$$

n'est pas diagonalisable. Comparer avec [**30.2**].

8. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si, et seulement si, il existe des matrices P_1, P_2, …, P_r dans $\mathfrak{M}_n(R)$ telles que $M \in \mathrm{Vect}(P_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$ avec

$$\begin{cases} \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, & P_k^2 = P_k = {}^tP_k \\ \forall\, 1 \leqslant j < k \leqslant n, & P_jP_k = P_kP_j = 0 \end{cases}$$

9. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?

10. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est une partie convexe de $\mathrm{L}(E)$ et un **cône positif** :

$$\forall\, (\lambda, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^+(E), \quad \lambda \cdot u \in \mathcal{S}^+(E).$$

11. On suppose connue une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant r}} F_k.$$

On note p_1, …, p_r, les projections associées à cette décomposition de E.
11.a Les p_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont des projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k < \ell \leqslant n, \quad p_k \circ p_\ell = p_\ell \circ p_k = 0.$$

11.b Tout endomorphisme $u \in \mathrm{Vect}(p_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r)$ est symétrique. Condition pour que u soit positif ? défini positif ?

44. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, →[**34.4**]

$$\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A, \qquad \operatorname{Im} {}^tAA = (\operatorname{Ker} A)^\perp,$$
$$\operatorname{Ker} A^tA = (\operatorname{Im} A)^\perp, \qquad \operatorname{Im} A^tA = \operatorname{Im} A$$

et en particulier

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A^tA) = \operatorname{rg}(A).$$

45. Soit $(f,g) \in \mathcal{S}(E)$. L'endomorphisme $f \circ g$ est symétrique si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

46. Soit E, un espace euclidien. Tout endomorphisme symétrique $v \in \mathcal{S}(E)$ est continu : il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \|v(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

47. Endomorphismes contractants [29.2]
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
47.1

$$\min_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \min_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |\lambda|, \qquad \max_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} |\lambda|$$

Que devient le résultat lorsque $u \in \mathcal{S}^+(E)$?
47.2 Un endomorphisme symétrique u est **contractant** :

$$\forall\, x \in E, \qquad \|u(x)\| \leqslant \|x\|$$

si, et seulement si, $\operatorname{Sp}(u) \subset [-1,1]$. Il est **strictement contractant** :

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \|u(x)\| < \|x\|$$

si, et seulement si, $\operatorname{Sp}(u) \subset \,]-1,1[$.

48. *Suite de* [**36**] –

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad |\det M|^2 \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}({}^tMM)}{n}\right)^n$$

49. Affinités orthogonales
Soit a, un vecteur unitaire de E.
1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme défini par

$$\forall\, x \in E, \quad f_\alpha(x) = x + \alpha\,(\,a \mid x\,)\,a$$

est symétrique.
2. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f_α. Interprétation géométrique de f_α ?
3. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Reconnaître $f_\alpha \circ f_\beta$.

50. Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$A = I_n + \alpha {}^tUU$$

est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

51. Soient a et b, deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E. L'endomorphisme u défini par

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = (\,a \mid x\,)\,a + (\,b \mid x\,)\,b$$

est symétrique. Son noyau est l'orthogonal du plan $\operatorname{Vect}(a,b)$. Les vecteurs $(a+b)$ et $(a-b)$ sont des vecteurs propres respectivement associés à $1 + (\,a \mid b\,)$ et à $1 - (\,a \mid b\,)$.

52. Soient u et v, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Ils sont représentés par les matrices colonnes U et V dans la base canonique et on note f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par la matrice

$$A = I_n + U^tV + V^tU$$

dans la base canonique.
52.1 Le réel λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur x non nul tel que

$$(\lambda - 1)\cdot x = (\,x \mid u\,)\cdot v + (\,x \mid v\,)\cdot u.$$

52.2 Si $n \geqslant 3$, alors le spectre de f est constitué des réels

$$1, \quad 1 + (\,u \mid v\,) - \|u\|\,\|v\|, \quad 1 + (\,u \mid v\,) + \|u\|\,\|v\|$$

et la matrice A est diagonalisable.

53. Soient a et b, deux vecteurs unitaires.
1. L'endomorphisme f défini par

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x - (\,a \mid x\,)\,b$$

est symétrique si, et seulement si, a et b sont égaux ou opposés.
2. L'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $(\,a \mid b\,) \neq 1$, c'est-à-dire $a \neq b$ et, dans ce cas,

$$\forall\, x \in E, \quad f^{-1}(x) = x + \frac{(\,a \mid x\,)}{1 - (\,a \mid b\,)}\,b.$$

3. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, a et b sont ne sont pas orthogonaux et dans ce cas,

$$E = (\mathbb{R}\cdot b) \oplus (\mathbb{R}\cdot a)^\perp.$$

54. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de coefficients

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad a_{i,j} = i + j.$$

On note U et V, les matrices colonnes qui représentent les vecteurs

$$u = (1,1,\dots,1) \quad \text{et} \quad v = (1,2,\dots,n)$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
54.1 Comme $A = V^tU + U^tV$, la matrice A est diagonalisable, l'image de A est engendrée par U et V et le noyau de A est l'orthogonal de $\operatorname{Im} A$.
54.2 Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle, alors il existe deux réels a et b tels que

$$X = aU + bV.$$

54.3 Les valeurs propres non nulles de A sont

$$(\,u \mid v\,) \pm \|u\|\,\|v\|$$

et les sous-espaces propres correspondant sont les droites dirigées par les vecteurs $\|v\|\,U \pm \|u\|\,V$.

55. Sous-espaces stables
Soit u, un endomorphisme de l'espace euclidien E. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E étant donnée, on note $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et v, l'endomorphisme de E défini par ${}^tA = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$.
55.1 Un sous-espace F de E est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par v. Comparer avec [**10.71**].
55.2 Si $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le plan $[ax + by + cz = 0]$ est stable par u si, et seulement si, (a,b,c) est un vecteur propre de v.

56. Si l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\,P \mid Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors on peut vérifier sur la base canonique [**19**] que l'endomorphisme u défini par

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = \int_0^1 (t+x)^n P(t)\,\mathrm{d}t$$

est symétrique. →[**5.42**]

57. Double produit vectoriel
Soit $a \in \mathbb{R}^3$, un vecteur unitaire. Comme

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (\,(a \wedge x) \wedge a \mid y\,) = (\,a \wedge x \mid a \wedge y\,)$$

l'endomorphisme $f = [x \mapsto (a \wedge x) \wedge a]$ est symétrique, positif mais pas défini positif.
Reconnaître f à l'aide de la formule du double produit vectoriel :

$$u \wedge (v \wedge w) = (\,u \mid w\,)\cdot v - (\,u \mid v\,)\cdot w.$$

58. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout entier *impair* $p \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

59. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'indice p. Si les matrices A et ${}^tA$ commutent, alors la matrice symétrique ${}^tAA$ est nilpotente et la matrice A est nulle **[34.4]**.

60. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique.

1. Quelle que soit la matrice colonne X,

$$ {}^tXAX = 0. $$

2. Si $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives, alors la matrice $A + B$ est inversible.

61. Soient A et B, deux matrices symétriques réelles. On suppose que la matrice B est définie positive **[32]**.

61.1 L'application φ_B définie par

$$ \forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_B(X,Y) = {}^tXBY $$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

61.2

1. Il existe une matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$$ B = PD^tP. $$

2. Il existe une matrice symétrique et inversible L telle que

$$ B = {}^tLL. $$

61.3 Il existe une matrice symétrique réelle C telle que

$$ AX = \lambda BX \iff C(LX) = \lambda(LX) $$

pour toute matrice colonne X.

61.4 Il existe une base $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, orthonormée pour le produit scalaire φ_B, et des scalaires réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad Ae_i = \lambda_i\, Be_i. $$

62. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, une matrice dont les valeurs propres sont strictement positives. On les note :

$$ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n $$

et on pose $\kappa_A = \sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$.

62.1 Il existe une matrice orthogonale P telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}A^{-1}P$ soient diagonales.

62.2 Quels que soient les réels $y_1, \ldots, y_n$,

$$ \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} y_i^2\Big) $$

donc $\|X\|^2 \leqslant [({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)]^{1/2}$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

62.3 En posant $Y = {}^tPX = (y_1, \ldots, y_n)$, on a :

$$ ({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \kappa_A^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_i} y_i^2\Big) $$

donc

$$ \begin{aligned} [({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X)]^{1/2} &\leqslant \frac{\kappa_A}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\lambda_i}{\lambda_n} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\Big] y_i^2 \\ &\leqslant \frac{\kappa_A + \kappa_A^{-1}}{2} \|X\|^2. \end{aligned} $$

III

Automorphismes orthogonaux

63. ✍ *Un endomorphisme u de E est **orthogonal** lorsque*

$$ \forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big) = (\, x \,|\, y \,). $$

*On dit qu'un endomorphisme orthogonal **conserve le produit scalaire**.*

64. ➙ **Action sur les bases orthonormées**
Soit $u \in \mathrm{L}(E)$.

64.1 *Si u est un endomorphisme orthogonal, alors l'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E et u est un automorphisme de E.*

64.2 *Si l'image par u d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E, alors u est un automorphisme orthogonal.*

65. ➙ **Isométries**
*Un endomorphisme u de E est orthogonal si, et seulement si, u est une **isométrie vectorielle** :*

$$ \forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|. $$

66. **Groupe orthogonal** $\mathrm{GL}(E)$ **et rotations**

66.1 ➙ *L'ensemble des automorphismes orthogonaux est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.*

66.2 ✍ *Le groupe des automorphismes orthogonaux, dit **groupe orthogonal de** E, est noté $O(E)$.*

III.1 Représentation matricielle

67. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$ {}^tMM = I_n \iff M^tM = I_n $$

et si ${}^tMM = I_n$, alors M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

68. ➙ *Soit $u \in \mathrm{L}(E)$, représenté par la matrice M dans une base orthonormée de E. L'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal si, et seulement si,*

$$ {}^tMM = I_n. $$

Matrices orthogonales

69. **Groupe orthogonal** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

69.1 ✍ *Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** lorsque*

$$ {}^tMM = M^tM = I_n. $$

69.2 L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

69.3 ✍ *Le groupe, noté $O_n(\mathbb{R})$, des matrices orthogonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé **groupe orthogonal de** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

70. ➙ **Caractérisations des matrices orthogonales**
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *La matrice M est orthogonale.*
2. *La matrice M représente un automorphisme orthogonal dans une base orthonormée de E.*
3. *La matrice M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.*
4. *Les colonnes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*
5. *Les lignes de la matrice M forment une base de $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.*

71. ➙ *Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'un automorphisme orthogonal) est égal à ± 1.*

III.2 Exemples géométriques

72. En général, une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal.

Rotations

73. Les rotations sont, par définition, les isométries qui conservent l'orientation [**71**].

74. ✍ *Le **groupe spécial orthogonal de** E est défini par*

$$\mathrm{SO}(E) = O(E) \cap \mathrm{SL}(E).$$

Les éléments du groupe $\mathrm{SO}(E)$ *sont les automorphismes orthogonaux dont le déterminant est égal à* 1 *et sont appelés les **rotations de** E.*

75. ✍ *Le **groupe spécial orthogonal de** $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par*

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).$$

Les matrices $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *sont appelées les **matrices de rotation**.*

76. ➙ *Soit* $M \in O_n(\mathbb{R})$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *La matrice M est une matrice de rotation.*
2. *La matrice M représente une rotation dans une base orthonormée.*
3. *Le déterminant de M est positif.*
4. *La matrice M est la matrice de passage d'une base orthonormée directe à une base orthonormée directe.*

Symétries orthogonales

77. Les automorphismes orthogonaux les plus simples (par leur structure géométrique) sont les symétries orthogonales.

77.1 Si une symétrie $s \in \mathrm{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal, alors ses sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E)$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E)$ sont orthogonaux.

77.2 ✍ *Un endomorphisme s est une **symétrie orthogonale** lorsque s est une symétrie :*

$$s^2 = \mathrm{I}_E$$

et que ses deux sous-espaces propres :

$$E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) \quad \textit{et} \quad E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E)$$

sont orthogonaux.

77.3 Si s est une symétrie orthogonale, alors

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E).$$

En particulier,

$$\begin{cases} [\mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E)]^\perp = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E) \\ [\mathrm{Ker}(s + \mathrm{I}_E)]^\perp = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E). \end{cases}$$

78. ➙ **Caractérisations des symétries orthogonales**

Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. *L'endomorphisme u est une symétrie orthogonale.*
2. $u^2 = \mathrm{I}_E$ *et* $u \in \mathcal{S}(E)$.
3. $u \in \mathcal{S}(E) \cap O(E)$.
4. $u^2 = \mathrm{I}_E$ *et* $u \in O(E)$.

79. ➙ *Soient s et p, deux endomorphismes de E qui vérifient la relation : $s = 2p - \mathrm{I}_E$. Alors s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, p est un projecteur orthogonal.* →[**22**]

Réflexions

80. Les symétries orthogonales les plus simples sont celles pour lesquelles le sous-espace **fixe** : $\{x \in E \ : \ s(x) = x\}$ est maximal.

80.1 ✍ *Un endomorphisme s de E est une **réflexion** lorsque s est une symétrie orthogonale et que le sous-espace propre*

$$E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E)$$

est un hyperplan.

80.2 ✍ *Une **matrice de réflexion** est une matrice symétrique et orthogonale $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que le sous-espace propre* $\mathrm{Ker}(M - I_n)$ *soit un hyperplan.*

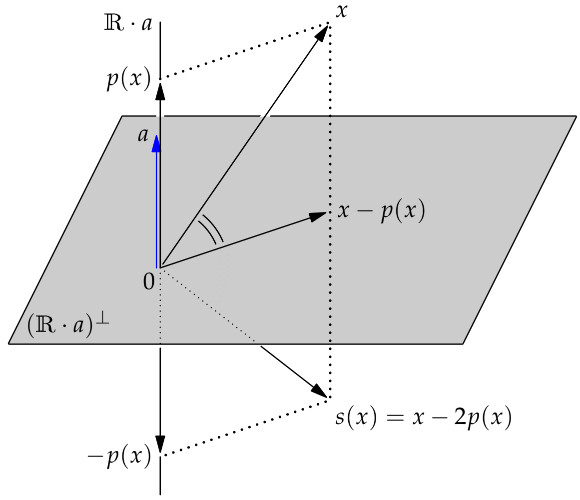
80.3 Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. Une matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de réflexion si, et seulement si, il existe une réflexion s de E telle que $M = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

81. **Projection sur $\mathbb{R} \cdot a$ et réflexion d'hyperplan $(\mathbb{R} \cdot a)^\perp$**

81.1 Pour tout vecteur $a \in E$ non nul, l'application $s : E \to E$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad s(x) = x - 2\frac{(\,a\,|\,x\,)}{\|a\|^2}\,a$$

est une réflexion qui fixe l'hyperplan $a^\perp$.



81.2 Si le vecteur a est représenté par $A \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}_0$, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(s) = I_n - 2\frac{A\,{}^tA}{{}^tAA}.$$

82. ➙ *Pour tout hyperplan H de E, il existe une, et une seule, réflexion s telle que* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) = H$.

83. ✍ *Soit H, un hyperplan de E. La **réflexion d'hyperplan** H est l'unique réflexion s telle que*

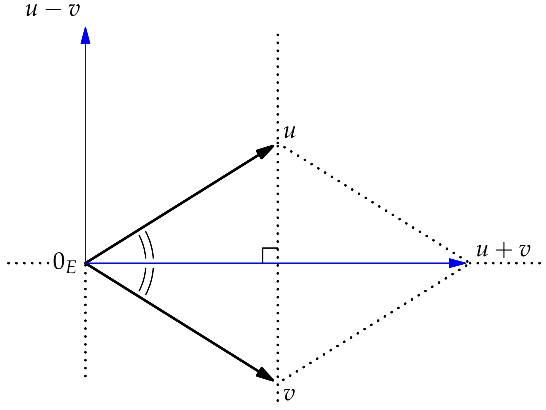
$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{I}_E) = H.$$

84. **Réflexion échangeant deux vecteurs**

84.1 Soit s, une réflexion telle que $s(u) = v$. Alors $s(v) = u$ et $s(u - v) = -(u - v)$.

84.2 ➙ *Étant donnés deux vecteurs u et v, distincts et de même norme, il existe une, et une seule, réflexion s telle que*

$$s(u) = v \quad \textit{et} \quad s(v) = u.$$



Entraînement

85. Questions pour réfléchir

1. L'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Condition sur $\Omega \in E$ pour que l'application $[M \mapsto \Omega M]$ soit un endomorphisme orthogonal de E.

2. Un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ est un automorphisme orthogonal si, et seulement si,

$$\forall\,(x,y) \in E \times E, \quad \big(u(x)\,\big|\,y\big) = \big(x\,\big|\,u^{-1}(y)\big).$$

3. Que dire des valeurs propres d'un automorphisme orthogonal ?

4. Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det M = \pm 1$ est-elle une matrice orthogonale ?

5.a La matrice I_n est une matrice de rotation.

5.b La matrice $-I_n$ est-elle une matrice de rotation ?

6. Si $\det M = 1$, la matrice M est-elle une matrice de rotation ?

7. Si $\dim E = 3$, quelles symétries sont aussi des rotations ?

8. Matrice d'une symétrie orthogonale relative à une base orthonormée quelconque ; à une base orthonormée adaptée aux sous-espaces propres.

9. Une réflexion peut-elle être une rotation ?

86. Soit $f \in O(E)$.

1. Pour tout sous-espace F de E, l'orthogonal de $f_*(F)$ est le sous-espace $f_*(F^\perp)$.

2. Si $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$, alors $f_*(F^\perp) = F^\perp$.

87. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

est une matrice de rotation si, et seulement si, a, b et c sont les racines d'un polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $0 \leqslant k \leqslant 4/27$.

88. Une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\det A = 1$ et $\mathrm{tr}(^tAA) = 2$.

IV

Réductions des isométries

89. Isométries et sous-espaces stables

89.1 ➙ *Si V est un sous-espace vectoriel stable par $u \in O(E)$, alors l'endomorphisme u_V induit par restriction de u à V est un automorphisme orthogonal de V.*

89.2 Si $u \in \mathrm{GL}(E)$ et si V est un sous-espace vectoriel stable par u, alors V est stable par u^{-1}. →[**10.19.2**]

89.3 ➙ *Si V est un sous-espace vectoriel stable par un automorphisme orthogonal u, alors $V^\perp$ est stable par u.*

90. Spectre d'une isométrie

90.1 ➙ *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in O(E)$, alors $\lambda = \pm 1$.*

90.2 Considérée comme une matrice *réelle*, une matrice orthogonale ne peut admettre comme valeurs propres que 1 et -1.

90.3 Les valeurs propres d'une matrice orthogonale considérée comme une matrice *complexe* sont des nombres complexes de module 1.

91. Soit $u \in O(E)$.
On considère les sous-espaces vectoriels

$$V_+ = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \quad \text{et} \quad V_- = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{I}_E).$$

91.1 Les sous-espaces vectoriels V_+ et V_- sont orthogonaux.

91.2 Les sous-espaces

$$V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \quad \text{et} \quad F = \big(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-\big)^\perp$$

sont stables par u.

91.3 Si x est un vecteur non nul de F, alors le sous-espace $\mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan.

91.4 Si $\dim E = 3$, alors $\dim F \leqslant 2$.

IV.1 Isométries vectorielles du plan

92.1 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

sont orthogonales. De plus, $\det R(\theta) = 1$ et $\det S(\theta) = -1$.

92.2 Pour toute matrice P de $O_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\theta)$ ou $P = S(\theta)$.

93. Rotations

93.1 Les matrices $R(\alpha)$ et $R(\beta)$ sont semblables si, et seulement si, $\alpha = \pm\beta\,[2\pi]$.

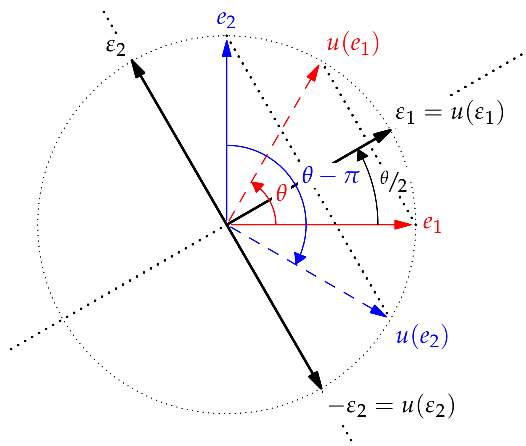
93.2 Quels que soient les réels α et β,

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta).$$

93.3 ➙ *L'application $[\theta \mapsto R(\theta)]$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$. Ce morphisme est surjectif et son noyau est $2\pi\mathbb{Z}$.*

93.4 Le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif.

94. Réflexions
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $S(\theta)$ est une matrice de réflexion.



94.1 Si la matrice $S(\theta)$ représente l'isométrie u dans la base orthonormée (e_1, e_2), alors $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont les images respectives de e_1 et de e_2 par les rotations d'angles θ et $(\theta - \pi)$.

94.2 Les sous-espaces propres associés à 1 et à -1 sont les droites dirigées respectivement par

$$\langle \cos\theta/2, \sin\theta/2 \rangle \quad \text{et par} \quad \langle -\sin\theta/2, \cos\theta/2 \rangle.$$

95. Relations de commutation

$$S(\alpha)S(\beta) = R(\alpha - \beta) \tag{1}$$
$$S(\beta)R(\alpha) = S(\beta - \alpha) \tag{2}$$
$$R(\alpha)S(\beta) = S(\alpha + \beta) \tag{3}$$

Classifications des isométries vectorielles du plan

96. ➙ *Soit u, un automorphisme orthogonal du plan euclidien E.*

96.1 *Si u est une rotation, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = R(\pm\theta)$$

pour toute *base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.*

96.2 *Sinon, pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = S(\theta)$ et il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E telle que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \mathrm{Diag}(1, -1).$$

97. Selon les sous-espaces propres
On peut classer les isométries planes en fonction de leurs sous-espaces propres.

— Un seul sous-espace propre : I_2 et $-I_2$.

— Deux droites propres : les réflexions, représentées (dans une base orthonormée convenable) par la matrice $\mathrm{Diag}(1,-1)$.

— Aucun sous-espace propre : les rotations, représentées par $R(\pm\theta)$ pour un angle $0<\theta<\pi$.

98. Selon la dimension du sous-espace fixe
On peut aussi classer les isométries en fonction de la dimension du sous-espace fixe $F=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{I}_E)$.

— Si $\dim F=2$, alors $u=\mathrm{I}_E$.

— Si $\dim F=1$, alors u est une réflexion.

— Si $\dim F=0$, alors u est une rotation d'angle $0<\theta\leqslant\pi$ (avec le cas particulier $\theta=\pi$ pour lequel $u=-\mathrm{I}_E$).

IV.2 Isométries en dimension $n\geqslant 3$

99. *Suite de* **[91]** – Le sous-espace $F=(V_+\oplus V_-)^\perp$ est stable par u. On suppose qu'il existe un entier k tel que $2k\leqslant\dim F$ et des plans $P_1,\ldots,P_k$ contenus dans F, deux à deux orthogonaux et stables par u.

99.1 Si G est un sous-espace vectoriel de F, alors **[8.4]**

$$F=G\overset{\perp}{\oplus}(V_+\overset{\perp}{\oplus}V_-\overset{\perp}{\oplus}G)^\perp.$$

99.2 Si $\dim F>2k$, alors le sous-espace vectoriel

$$F_{k+1}=\big[(V_+\overset{\perp}{\oplus}V_-)\overset{\perp}{\oplus}(P_1\overset{\perp}{\oplus}P_2\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P_k)\big]^\perp$$

est stable par u et contenu dans F, donc $\dim F\geqslant 2k+2$.

99.3 Dans ce cas, l'endomorphisme u_{k+1} induit par restriction de u à F_{k+1} est un automorphisme orthogonal qui n'a pas de valeurs propres réelles et son polynôme minimal admet un diviseur μ_{k+1} irréductible de degré 2.

99.4 Si x_{k+1} est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big(\mu_{k+1}(u_{k+1})\big)$, alors

$$P_{k+1}=\mathrm{Vect}(x_{k+1},u(x_{k+1}))$$

est un plan stable par u, contenu dans F et orthogonal aux plans $P_1,\ldots,P_k$.

100. ➝ *Soit $u\in O(E)$. Il existe des plans vectoriels $P_1,\ldots,P_d$, stables par u et deux à deux orthogonaux tels que*

$$E=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{I}_E)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Ker}(u+\mathrm{I}_E)\overset{\perp}{\oplus}\Big(\overset{\perp}{\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant d}}P_k\Big).$$

101. ➝ **Traduction matricielle**
En notant $p=\dim V_+$ et $q=\dim V_-$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E et des réels $0<\omega_1,\ldots,\omega_d<\pi$ tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\mathrm{Diag}\big(I_p,-I_q,R(\omega_1),\ldots,R(\omega_d)\big).$$

L'entier q est pair si, et seulement si, u est une rotation.

Classifications des isométries vectorielles de l'espace

102. Selon la dimension du sous-espace fixe

102.1 Si $\dim E=3$, on peut classer les isométries de l'espace en fonction de la dimension du sous-espace fixe $V_+=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{I}_E)$.

— Si $\dim V_+=3$, alors $u=\mathrm{I}_E$.

— Si $\dim V_+=2$, alors u est une réflexion représentée dans une base orthonormée convenable par la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right).$$

— Si $\dim V_+=1$, alors u est une rotation et il existe un angle $0<\theta\leqslant\pi$ tel que la matrice de u soit

$$R_x(\theta)=\begin{pmatrix}1&0\\0&R(\theta)\end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée convenable.

— Si $\dim V_+=0$, alors il existe $0<\theta\leqslant\pi$ tel que, dans une base orthonormée convenable, la matrice de u soit

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1&0\\0&R(\theta)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}-1&0\\0&I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&R(\theta)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&R(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&I_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette isométrie est la composée d'une rotation et d'une réflexion qui commutent.

102.2 Isométries diagonalisables
En dimension 3, les isométries diagonalisables sont les suivantes.

— L'identité I_E.

— Les réflexions.

— Les rotations d'angle $\theta=\pi$, c'est-à-dire les **demi-tours d'axe** V_+, appelés aussi **symétries axiales**.

— La **symétrie centrale** $-\mathrm{I}_E$.

103. Selon le déterminant
Si $\dim E=3$, on distingue :

— Les rotations ($\det u=1$) ;

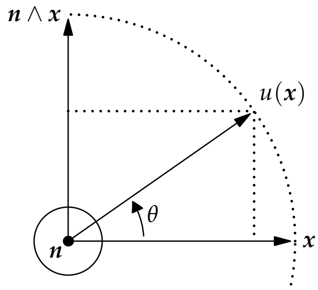
— Les réflexions et les composées d'une rotation et d'une réflexion ($\det u=-1$).

Méthode : Matrice d'une rotation en dimension 3

104. Soient θ, un réel ; $\boldsymbol{n}$, un vecteur unitaire d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 et $u\in\mathrm{SO}(E)$, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle dirigée et orientée par $\boldsymbol{n}$.

104.1 On a : $u(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}$ et

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in(\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{n})^\perp,\quad u(\boldsymbol{x})=\cos\theta\cdot\boldsymbol{x}+\sin\theta\cdot(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{x})$$



104.2 Plus généralement,

$$\forall\,\boldsymbol{x}\in E,\quad u(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{n}\,|\,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}+\cos\theta\cdot(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{n}\,|\,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n})+\sin\theta\cdot(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{x})$$

ce qui permet d'écrire la matrice de u dans une base orthonormée directe quelconque.

Méthode : Analyse d'une rotation en dimension 3

105. On considère un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans une base orthonormée directe par une matrice orthogonale $A \in O_3(\mathbb{R})$:

$$^tAA = I_3.$$

105.1 On vérifie qu'il s'agit d'une matrice de rotation en calculant une matrice colonne $N \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AN = N \qquad \text{et} \qquad {}^tNN = 1.$$

Cette colonne représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ qui dirige l'axe de la rotation u.
Il reste à déterminer le réel θ (unique modulo 2π) tel que u soit la rotation d'angle θ autour de la droite orientée par $\boldsymbol{n}$.
105.2 On choisit une matrice colonne $V \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui représente un vecteur unitaire $\boldsymbol{v}$ orthogonal à $\boldsymbol{n}$:

$${}^tNV = 0, \qquad {}^tVV = 1.$$

105.3 Avec $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}$, la famille $\mathscr{B}_0 = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base orthonormée directe. La matrice de u relative à cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$ et

$$\det(N, V, AV) = \det_{\mathscr{B}_0}\big(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, u(\boldsymbol{v})\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$

105.4 Une autre méthode d'étude est présentée au **[122]**

Entraînement

106. Questions pour réfléchir

1. Si une isométrie $u \in O(E)$ est diagonalisable, alors u est une symétrie.
2. Condition pour que deux rotations du plan *affine* commutent.
3. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 est-il stable par produit ?
4. *Suite de* **[92]** – Comparer $S(\alpha)S(\beta)$ et $S(\beta)S(\alpha)$.
5. *Suite de* **[92]** – Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie l'équation
$$S(\alpha)S(\beta) = R(\theta)$$
si, et seulement si, $\alpha - \beta = \theta$. Interpréter géométriquement.
6. *Suite de* **[94]** – Interpréter géométriquement.
7. *Suite de* **[94]** – Simplifier l'expression ${}^tPS(\theta)P$ en prenant $P = R(\alpha)$. Étudier le cas $\alpha = -\theta/2$. Interpréter géométriquement.
8. Condition pour que deux matrices orthogonales appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ commutent ?
9. Pour toute matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$,
$${}^tPR(\theta)P = R\big((\det P)\theta\big).$$
Interpréter géométriquement.
10. Expliciter une matrice orthogonale P telle que
$$\operatorname{Diag}(1, 1, -1) = {}^tP\operatorname{Diag}(-1, 1, 1)P.$$
Est-il possible de choisir P de telle sorte que $\det P = 1$?
11. *Suite de* **[102]** –
11.a Les matrices $R_x(\theta)$ et $R_x(-\theta)$ sont-elles semblables ?
11.b Étudier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$R_x(-\theta) = {}^tPR_x(\theta)P.$$
Interpréter géométriquement.
12. *Suite de* **[104]** – Si $u \neq \mathrm{I}_E$, alors il n'y a que deux couples
$$(\boldsymbol{n}, \theta) \in E \times [-\pi, \pi]$$
possibles et ils sont opposés. Interpréter géométriquement.
13. *Suite de* **[105]** – Si $A \in O_3(\mathbb{R})$ et si l'équation $AN = N$ n'a que le vecteur $N = 0$ pour solution, que dire de la matrice A ?

107. Matrices de rotation
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Les matrices suivantes représentent, dans la base canonique, la rotation d'angle θ autour de la droite vectorielle *orientée* par le vecteur $\boldsymbol{u}$. →**[104]**, **[105]**

107.1 Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

107.2 Pour $\theta = \pi/3$ et $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

107.3 Pour $e^{i\theta} = \frac{3+4i}{5}$ et $\boldsymbol{u} = (0, -1, 2)$:

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & -8\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 8\sqrt{5} & 17 & -4 \\ 4\sqrt{5} & -4 & 23 \end{pmatrix}$$

107.4 Pour $e^{i\theta} = \frac{4+3i}{5}$ et $\boldsymbol{u} = (\sqrt{2}, 0, 1)$:

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & -3\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} & 12 & -3\sqrt{6} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{6} & 13 \end{pmatrix}$$

107.5 Pour $\theta = \pi/6$ et $\boldsymbol{u} = (1, 0, -1)$:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & -2+\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

107.6 Pour $\theta = 2\pi/3$ et $\boldsymbol{u} = (1, 0, 2)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{15} & 6 \\ 2\sqrt{15} & -5 & -\sqrt{15} \\ 6 & \sqrt{15} & 7 \end{pmatrix}$$

107.7 Pour $\theta = \pi/2$ et $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

107.8 Pour $e^{i\theta} = \frac{1+2i}{\sqrt{5}}$ et $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -2\sqrt{10} & 2\sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} & 5+\sqrt{5} & 5-\sqrt{5} \\ -2\sqrt{10} & 5-\sqrt{5} & 5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

107.9 Pour $\theta = 3\pi/4$ et $\boldsymbol{u} = (-2, 0, 1)$:

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-\sqrt{2} & -\sqrt{10} & -4-2\sqrt{2} \\ \sqrt{10} & -5\sqrt{2} & 2\sqrt{10} \\ -4-2\sqrt{2} & -2\sqrt{10} & 2-4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

108. Soient $u \in O(E)$ et $v = u - I_E$.

108.1 Comme $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^{\perp}$, pour tout vecteur $x \in E$, il existe deux vecteurs $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in E$ tels que

$$x = y + v(z) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|v(z)\|^2.$$

Le couple (y, z) est-il unique ? Que valent $u(y)$ et $\|u(z)\|$?

108.2 La suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)$$

converge vers le projeté orthogonal de x sur $\operatorname{Ker} v$.

109. Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La matrice

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1+\theta\cos 2\theta & -\theta\sin 2\theta \\ -\theta\sin 2\theta & 1-\theta\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

110. Exemples et contre-exemples

1. Exemples d'endomorphismes symétriques ? non symétriques ?
2. Exemples d'endomorphismes symétriques positifs ? définis positifs ? non positifs ?
3. Exemple d'endomorphisme u tel que $\det u = \pm 1$ et qui n'est pas un automorphisme orthogonal.
4. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad (\, P \mid Q \,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors $\|X^n\|$ tend vers 0 alors que la suite des fonctions $[t \mapsto t^n]$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Comparer avec [**17**] et avec [**118**].

111. Méthodes

1. Comment vérifier qu'une matrice est orthogonale ?
2. Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$.

2.a Comment déterminer si A est une matrice de rotation ?

2.b Comment déterminer un plan stable par A ?

3. Comment vérifier qu'un endomorphisme est un automorphisme orthogonal ?
4. Comment vérifier qu'un endomorphisme est une projection orthogonale ? une symétrie orthogonale ?
5. Un endomorphisme u est représenté par la matrice A dans une base $\mathscr{B}$ (qui n'est pas nécessairement une base orthonormée).

5.a Comment déterminer si u est symétrique ?

5.b Comment déterminer si u est orthogonal ?

112. Questions pour réfléchir

1. De quelle manière peut-on considérer que la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ est la *seule* structure euclidienne de dimension n ?
2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de l'espace euclidien $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$. L'application $f : \mathbb{R}^n \to E$ définie par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, sur E, muni de $(\cdot \mid \cdot)$.

3. *Suite de* [**17**] – La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Elle converge uniformément sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Approfondissement

113. Codiagonalisation d'endomorphismes symétriques
Soient f et g, deux endomorphismes symétriques.

1. S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g, alors $f \circ g = g \circ f$.
2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, on note g_λ, l'endomorphisme induit par restriction de g au sous-espace

$$E_\lambda^f = \operatorname{Ker}(f - \lambda\, I_E).$$

Tout vecteur propre de g_λ est aussi un vecteur propre de f. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.

114. Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif
Tout endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$ est une **racine carrée** de $u \in \mathcal{S}^+(E)$

1. On suppose qu'il existe une racine carrée v de u.

1.a Si e_k est un vecteur propre de v associé à la valeur propre μ_k, alors e_k est un vecteur propre de u. À quelle valeur propre est-il associé ?

1.b Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres communs à u et à v.

2. Il existe une, et une seule, racine carrée de u.
3. Interprétation matricielle.

115. Caractérisation des homothéties
On sait que : si toute droite de E stable par $u \in L(E)$, alors u est une homothétie [**10.65**].

115.1 On considère un espace euclidien E.

1. Si tout hyperplan de E est stable par u, alors u est une homothétie.
2. S'il existe un entier $2 \leqslant r < n$ tel que tout sous-espace de dimension r soit stable par u, alors tout hyperplan de E est stable par u.

115.2 Étudier le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie quelconque.

116. Endomorphismes anti-symétriques
L'endomorphisme f d'un espace euclidien E est dit **anti-symétrique** lorsque

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big(\, f(x) \,\big|\, y \,\big) = -\big(\, x \,\big|\, f(y) \,\big).$$

116.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est anti-symétrique.
2. Pour tout $x \in E$, $\big(\, f(x) \,\big|\, x \,\big) = 0$.
3. La matrice A qui représente u dans une base orthonormée est anti-symétrique : ${}^tA = -A$.

116.2 On suppose ici que E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

4. Pour tout $u \in E$, l'application $f_u = [x \mapsto u \wedge x]$ est anti-symétrique.
5. Pour tout endomorphisme anti-symétrique f, il existe un, et un seul, vecteur $u \in E$ tel que $f = f_u$.
6. L'endomorphisme f_u est diagonalisable si, et seulement si, $u = 0$.
7. Il existe [**57**] une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f^2. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f^2 ?

116.3 Soit $f \in L(E)$, un endomorphisme anti-symétrique d'un espace euclidien de dimension quelconque.

8. Si F est un sous-espace stable par f, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par F.
9. Le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

$$E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f$$

10. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, une racine du polynôme minimal de f, considéré comme un polynôme à coefficients complexes.

10.a Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice de u dans une base orthonormée $\mathscr{B}$, alors il existe un vecteur-colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et

$$|\lambda|^2\, {}^t(\overline{X})X = {}^t(\overline{AX})(AX) = -\lambda^2\, {}^t(\overline{X})X.$$

10.b Qu'en conclure si $\lambda \in \mathbb{R}$? Et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?
11. Le rang de f est pair et $\det(f) \geqslant 0$.
12. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

117. Polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$
Le polynôme minimal d'un endomorphisme symétrique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On peut démontrer ce fait sans recourir à la notion de spectre complexe. →**[25]**

117.1 Soit $f \in \mathcal{S}(V)$ où $\dim V = 2$.
1. Le polynôme caractéristique C_f de $f \in \mathcal{S}(V)$ est de la forme $(X-a)(X-b)-c^2$ et est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Le polynôme C_f admet une racine double si, et seulement si, f est une homothétie.

117.2 Soit P, un diviseur irréductible de degré 2 du polynôme minimal de $u \in \mathcal{S}(E)$.
3. L'endomorphisme $P(u)$ n'est pas injectif et, quel que soit le vecteur $x_0 \in \operatorname{Ker} P(u)$, ce n'est pas un vecteur propre de u.
4. Si x_0 est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} P(u)$, alors le sous-espace vectoriel
$$V = \operatorname{Vect}(x_0, u(x_0))$$
est un plan stable par u.
5. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u_V induit par restriction de u à V est le polynôme P.
6. Conclure.

118. Contre-exemple au théorème de Riesz
L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par
$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$
On considère la forme linéaire $\varphi = [P \mapsto P(0)]$.
1.a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)\,dt.$$
1.b Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q_\omega \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$), alors $\varphi(P) = (P \mid Q_\omega)$ pour tout $P \in E$.
2. S'il existe $Q_\omega \in E$ tel que $\varphi(P) = (P \mid Q_\omega)$ pour tout $P \in E$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| \leqslant K\|P\|.$$
3.a Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$
3.b Quelle que soit cette suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée **[17]**.
4. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans E pour $\|\cdot\|$? Et pour $\|\cdot\|_\infty$?

119. Décomposition polaire
119.1 L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.

119.2 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
1. L'application
$$\varphi = \big[(X,Y) \mapsto {}^tX({}^tAA)Y\big]$$
est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique de E est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?
2. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E, orthonormée pour φ, telle que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ appartienne à T_n^+.
3. Il existe une matrice $T \in T_n^+$ telle que ${}^tAA = {}^tTT$.
4. Il existe un, et un seul, couple $(O,T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que $A = OT$.

Pour aller plus loin

120. Questions pour réfléchir
1. Soit $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$, un espace préhilbertien. Pour tout vecteur $a \in E$, la forme linéaire $\varphi_a = [x \mapsto (a \mid x)]$ est continue. Le théorème de Riesz **[7.3]** est-il encore vrai en dimension infinie ?
2. Si E est un espace réel de dimension finie et si $u \in L(E)$ est diagonalisable, alors il existe un produit scalaire sur E pour lequel u est un endomorphisme symétrique.
3. Étudier la structure du **cône isotrope** de $u \in L(E)$:
$$C_0(u) = \big\{x \in E \ :\ \big(x \mid u(x)\big) = 0\big\}$$
et comparer $C_0(u)$ au noyau de u.
4. Soit $u \in GL(E)$.
4.a Existe-t-il une structure euclidienne sur E pour laquelle u est un automorphisme orthogonal ?
4.b Étudier le cas où u est une symétrie.
5. Relation entre les matrices de u et de u^* dans une base qui n'est pas orthonormée ?
6. *Suite de* **[68]** – Caractériser les matrices qui représentent les automorphismes orthogonaux de E dans une base qui n'est pas orthonormée.

121. Soit u, un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique.
1. Quels que soient x, y et z dans $\mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\big(u(x),y,z\big) + \operatorname{Det}\big(x,u(y),z\big) + \operatorname{Det}\big(x,y,u(z)\big)\\ = \operatorname{tr}(u)\cdot \operatorname{Det}(x,y,z).\end{aligned}$$
2. D'après **[15.3]**, il existe un, et un seul, endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge y + x \wedge u(y).$$

122. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère une rotation u autour du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$.
122.1 Pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de E (obtenue en complétant le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$),
$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
122.2 D'après **[104]**,
$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad (u - u^{-1})(\boldsymbol{x}) = (2\sin\theta)\cdot(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{x})$$
122.3 Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$ est la matrice relative à une base orthonormée directe $\mathscr{B}_0$ de la rotation u, alors il existe trois réels (p,q,r) tels que
$$\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \cdot \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$
Comparer avec **[105]**.

123. Structure euclidienne sur E^*
La structure euclidienne de E permet de définir une structure euclidienne naturelle sur son espace dual E^*.
Pour tout $a \in E$, on pose $\varphi_a = [x \mapsto (a \mid x)]$.
1. Il existe un, et un seul, produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E^* tel que
$$\forall\, (a,b) \in E \times E, \quad \langle \varphi_a \mid \varphi_b \rangle = (a \mid b)$$
et l'application $[a \mapsto \varphi_a]$ est une isométrie de $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$ sur $\big(E^*, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$.

2. Une base $\mathscr{B}$ de E est une base orthonormée pour $(\cdot\,|\,\cdot)$ si, et seulement si, sa base duale $\mathscr{B}^*$ est une base orthonormée de E^* pour $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$.

124. On décrit ici tous les produits scalaires qui peuvent être définis sur un espace euclidien $\big(E, (\cdot\,|\,\cdot)\big)$.

1. Si $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E, il existe un, et un seul, endomorphisme symétrique défini positif u tel que

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \langle\, x\,|\,y\,\rangle = \big(\, x\,\big|\, u(y)\,\big).$$

2. Condition pour qu'un endomorphisme v soit symétrique pour $(\cdot\,|\,\cdot)$ et pour $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$.

125. Factorisation d'une isométrie
On considère un espace euclidien $\big(E, (\cdot\,|\,\cdot)\big)$.
Tout automorphisme orthogonal de E est décomposable en un nombre fini de réflexions et le nombre de réflexions qui apparaissent dans cette factorisation peut être choisi inférieur à $\dim E$.

1. Soit $f\in O(E)$, tel que $f\neq \mathrm{I}_E$. Il existe $u\neq 0_E$ tel que $f(u)\neq u$ et on pose $v=f(u)$.

1.a Il existe une réflexion r telle que $r(u)=v$.

1.b Pour tout $x\in E$ tel que $f(x)=x$,

$$(\, x\,|\, u-v\,) = 0 \quad\text{et}\quad r(x)=x.$$

1.c

$$\dim\mathrm{Ker}(r\circ f-\mathrm{I}_E) > \dim\mathrm{Ker}(f-\mathrm{I}_E)$$

2. On construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'isométries de E en posant $f_0=f$ et, pour tout $p\geqslant 1$,

— si $f_{p-1}=\mathrm{I}_E$, alors $f_p=\mathrm{I}_E$;

— sinon, alors $f_p=r_p\circ f_{p-1}$, où r_p est une réflexion telle que

$$\dim\mathrm{Ker}(f_p-\mathrm{I}_E) > \dim\mathrm{Ker}(f_{p-1}-\mathrm{I}_E).$$

Il existe un entier $p\leqslant\dim E$ tel que $f_p=\mathrm{I}_E$. Que peut-on en déduire sur f ?

3. Applications.

3.a Décomposition d'une rotation du plan en produit de deux réflexions.

3.b Classification géométrique des isométries de l'espace en fonction du sous-espace fixe (identité, réflexions, rotations, composées d'une rotation et d'une réflexion qui commutent).

126. Matrices orthosemblables
La matrice $B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthosemblable** à la matrice A lorsque

$$\exists\, P\in O_n(\mathbb{R}),\quad B={}^tPAP.$$

1. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Deux matrices orthosemblables sont semblables. La réciproque est-elle vraie ?

3. Si A est symétrique et si B est orthosemblable à A, alors B est symétrique.

4. Que dire d'une matrice orthosemblable à une matrice diagonale ?

5. Interpréter géométriquement la notion de matrices orthosemblables.

127.1 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, une fonction continue et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de réels deux à deux distincts.
Il existe une, et une seule, famille réelle $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall\, P\in\mathbb{R}_n[X],\quad \int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k).$$

(On peut appliquer le théorème de Riesz [**7.3**] aussi bien que la théorie des polynômes interpolateurs de Lagrange.)

127.2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$, et un seul, tel que

$$\forall\, Q\in\mathbb{R}_n[X],\quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^n 2^{-k}P_n(k)Q(k).$$

Existe-t-il un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ qui vérifie la relation suivante ?

$$\forall\, Q\in\mathbb{R}[X],\quad \sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k}P(k)Q(k)=\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t$$

128. Factorisation QR et matrices de Householder
L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique : la base canonique

$$\mathscr{B}_c=(e_1,\dots,e_n)$$

est une base orthonormée.

128.1 Existence de la décomposition
Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une base $\mathscr{B}$ telle que A soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

2. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ telle que la matrice de passage R_0 de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_0$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs.

3. La matrice $Q_0=R_0A$, matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}_0$, est orthogonale.

4. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A=QR$.

128.2✍ *Pour tout vecteur $a\in\mathbb{R}^n$ non nul, la **matrice de Householder** $H(a)$ associée à a est définie par*

$$H(a)=I_n-2\frac{A\,{}^tA}{{}^tAA}$$

où la matrice colonne A représente le vecteur a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. →[**81.2**]
Par convention, la matrice de Householder associée au vecteur nul est la matrice I_n.

128.3 Pratique de la décomposition
On va élaborer un algorithme qui produit une factorisation QR d'une matrice $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donnée en précisant celui qui est mis en œuvre au [**125**].

5. Si $v_1\in\mathbb{R}^n$ n'est pas colinéaire et de même sens que e_1, alors il existe [**84.2**] une réflexion h_1 et un scalaire $\lambda_1>0$ tels que

$$h_1(v_1)=\lambda_1 e_1.$$

6. Pour $1\leqslant j<n$, si le vecteur

$$w_j=\Big(x_1,\dots,x_{j-1},\sqrt{x_j^2+\cdots+x_n^2},0,\dots,0\Big)$$

est distinct du vecteur

$$v_j=(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,\dots,x_n),$$

alors il existe une réflexion h_j telle que

$$h_j(e_1)=e_1,\dots,h_j(e_{j-1})=e_{j-1},\quad h_j(v_j)=w_j.$$

7. Il existe $(n-1)$ matrices de Householder H_1, …, H_{n-1} telles que la matrice

$$R=H_{n-1}\cdots H_2H_1A$$

soit triangulaire supérieure, que la matrice

$$Q=H_1H_2\cdots H_{n-1}$$

soit orthogonale et que $A=QR$.