17
Espaces préhilbertiens réels

1. Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces *réels*.

2. Échauffement
Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad ({}^tAB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,j}$$

I

Produit scalaire

3. ✍ *Un **produit scalaire** sur l'espace vectoriel réel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est*
3.1 ***bilinéaire** :*
Quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in E^3$,

$$\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$$
$$\varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$$

3.2 ***symétrique** :*

$$\forall\, (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$$

3.3 *et **définie positive** :*

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x,x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0.$$

4. ✍ *Un **espace préhilbertien** est un espace vectoriel E sur lequel est défini un produit scalaire.*

5. Exemples canoniques
5.1 Sur $E = \mathbb{R}^n$:

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

5.2 Sur l'espace $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes :

$$\forall\, (X,Y) \in E \times E, \quad \varphi(X,Y) = {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

5.3 Sur l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées :

$$\forall\, (A,B) \in E \times E, \quad \varphi(A,B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}b_{k,\ell}.$$

5.4 Sur l'espace $E = \mathscr{L}_c^2(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I :

$$\forall\, (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.5 Sur l'espace $E = \ell^2(\mathbb{N})$ des suites réelles de carré sommable :

$$\forall\, (u,v) \in E \times E, \quad \varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

6. Exemples usuels
6.1 Sur $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$:

$$\forall\, (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.2 Sur l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall\, (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.3 Soit $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs. L'application définie par

$$\forall\, (X,Y) \in E \times E, \quad \varphi(X,Y) = {}^tXDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
6.4 Sur l'espace $E = \mathscr{L}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues et bornées :

$$\forall\, (f,g) \in E \times E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

6.5 Sur l'espace $E = \ell^1(\mathbb{R})$ des séries réelles absolument convergentes :

$$\forall\, (u,v) \in E \times E, \quad \varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

I.1 Norme associée au produit scalaire

7. ✍ *Si E est muni d'un produit scalaire φ, la **norme** sur E associée à ce produit scalaire est définie par*

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

8.1 La norme $\|x\|$ est positive pour tout $x \in E$. Un vecteur $x \in E$ est nul si, et seulement si, $\|x\| = 0$.
8.2 La norme est **positivement homogène**.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

8.3

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\varphi(x,y)$$

9. Représentation polaire
9.1 ✍ *Un vecteur $u \in E$ est **unitaire** lorsque sa norme est égale à* 1.
9.2 Tout vecteur non nul est le produit d'un réel strictement positif et d'un vecteur unitaire.

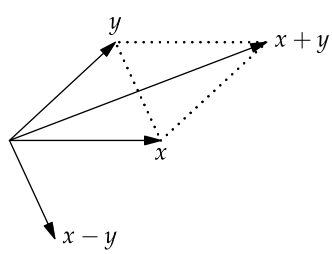
$$\forall\, x \neq 0_E, \quad x = \|x\|\,\frac{x}{\|x\|}$$

10. Formule de polarisation
On peut exprimer le produit scalaire en fonction de la norme qui lui est associée :

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big]$$

11. Identité du parallélogramme
Quels que soient x et y dans E,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$



Inégalité de Schwarz

12.1 ➞ *Quels que soient x et y dans E,*

$$\big|\varphi(x,y)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.
12.2 *L'égalité $\varphi(x,y) = \|x\|\,\|y\|$ a lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.*
12.3 *L'égalité $\varphi(x,y) = -\|x\|\,\|y\|$ a lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de sens opposés.*

13. Applications
13.1

$$\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^n x_k^2$$

13.2 Pour $a = (a_1,\dots,a_n)$ et $b = (b_1,\dots,b_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\sum_{k=1}^n k a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n k a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n k b_k^2\Big).$$

13.3

$$\forall\ A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\,\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$$

13.4 Soit $M = (m_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$.
1.

$$\forall\ U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \big|{}^t(MU)U\big| \leqslant {}^tUU$$

2.

$$\Big|\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{i,j}\Big| \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

14. Inégalité triangulaire
14.1 ➞ *Quels que soient x et y dans E,*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

14.2 Les égalités

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \qquad\qquad \|x-y\| = \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

ont lieu si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.
14.3 Il y a égalité

$$\|x+y\| = \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de sens opposés.

I.2 Suites convergentes

15. On suppose que E est muni d'un produit scalaire φ et que la norme associée à φ est notée $\|\cdot\|$.

16. ✍ *La **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$ sur E est l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\forall\ (x,y) \in E\times E, \quad d(x,y) = \|x-y\|.$$

17. ✍ *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E **converge vers** $\ell \in E$ lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0.$$

*Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** lorsqu'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

18. Limite d'une suite convergente
18.1 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.
18.2 ✍ *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la **limite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique vecteur $\ell \in E$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Entraînement

19. Questions pour réfléchir
1. Soit E, un espace préhilbertien réel.
1.a Si f et g sont deux applications de E dans E telles que

$$\forall\ (x,y) \in E\times E, \quad \big(f(x)\,\big|\,y\big) = \big(x\,\big|\,g(y)\big),$$

alors f et g sont linéaires.
1.b Si f est une application de E dans E telle que

$$\forall\ (x,y) \in E\times E, \quad \big(f(x)\,\big|\,f(y)\big) = (x\,|\,y),$$

alors f est linéaire.
2. Condition sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que l'application définie par

$$\forall\ (u,v) \in E\times E, \quad \varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n u_n v_n$$

soit un produit scalaire sur $E = \ell^2(\mathbb{R})$.
3. Condition sur la fonction K pour que l'application définie par

$$\forall\ (f,g) \in E\times E, \quad \varphi(f,g) = \int_I f(t)g(t)K(t)\,\mathrm{d}t$$

soit un produit scalaire sur $E = \mathscr{L}_c^2(I,\mathbb{R})$.
4. Soient x et y, deux vecteurs non nuls. Alors

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

5. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Tout sous-espace propre de u contient un vecteur unitaire.
6. Si x et y sont deux vecteurs unitaires distincts, alors

$$\forall\ t \in]0,1[, \quad \big\|(1-t)x + ty\big\| < 1.$$

Interprétation géométrique de l'inégalité ?
7. Développer l'expression

$$\big\|\|y\|^2\cdot x - \varphi(x,y)\cdot y\big\|^2$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire φ) et interpréter géométriquement.

20.
1. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ est continue, alors

$$\Big(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\Big) \geqslant 1$$

avec égalité si, et seulement si, f est constante.
2. Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[0,1]$ telles que $f(t)g(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Alors

$$\Big(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Big(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\Big) \geqslant 1.$$

21. Soit f, une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $[t \mapsto tf(t)]$ et $[t \mapsto f'(t)]$ sont deux fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
21.1 Les deux fonctions $[t \mapsto f(t)]$ et $[t \mapsto tf(t)f'(t)]$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
21.2 Comme

$$\forall\ x \geqslant 0, \quad xf^2(x) = \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^x tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

alors $xf^2(x)$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et

$$\Big(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} t^2f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

II

Orthogonalité

22. L'espace E est muni d'un produit scalaire qui est désormais noté $(\cdot \mid \cdot)$.

23. ✍ *Deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** lorsque*

$$(u \mid v) = 0.$$

24. Caractérisation du vecteur nul

24.1 Le vecteur x est nul si, et seulement si,

$$\forall\, y \in E, \quad (x \mid y) = 0.$$

24.2 L'endomorphisme u de E est identiquement nul si, et seulement si,

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \big(x \,\big|\, u(y)\big) = 0.$$

II.1 Familles orthogonales

25. ✍ *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** lorsque les vecteurs qui la constituent sont deux à deux orthogonaux.*

26. ✍ *Une famille orthogonale $(x_i)_{i \in I}$ est **orthonormée** lorsque les vecteurs x_i sont unitaires.*

27. ➙ **Caractérisation des familles orthonormées**

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormée si, et seulement si,

$$\forall\, (i, j) \in I \times I, \quad (x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}.$$

28.1 ➙ *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

28.2 ➙ *Une famille orthonormée est libre.*

29. Exemples fondamentaux

29.1 Pour $E = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la base canonique de E est orthonormée pour le produit scalaire canonique sur E.

29.2 *Suite de* **[6.2]** – On pose $u_0 = [t \mapsto 1]$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{-n} = [t \mapsto \cos nt] \quad \text{et} \quad u_n = [t \mapsto \sin nt].$$

La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale, mais pas orthonormée.

30. Théorème de Pythagore

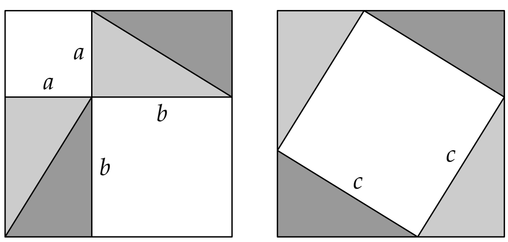
30.1 Quelle que soit la famille de vecteurs $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \Big\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i \mid x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \mid x_j). \end{aligned}$$

30.2 ➙ *Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une famille orthogonale. Alors*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

30.3 Preuve sans parole



30.4 ➙ *Si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors x et y sont orthogonaux.*

II.2 Sous-espaces orthogonaux

31.1 ✍ *Deux sous-espaces F et G sont **orthogonaux** lorsque*

$$\forall\, (x, y) \in F \times G, \quad (x \mid y) = 0.$$

Cette relation est notée : $F \perp G$.

31.2 Utilisation de familles génératrices

Le vecteur x est orthogonal au sous-espace $G = \mathrm{Vect}(y_j,\ j \in J)$ si, et seulement si,

$$\forall\, j \in J, \quad (x \mid y_j) = 0.$$

Les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I)$ et G sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall\, (i, j) \in I \times J, \quad (x_i \mid y_j) = 0.$$

32. Orthogonalité et somme directe

32.1 Si les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \{0\}$.

32.2 ➙ *Si $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe.*

32.3 ✍ *Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux, alors leur somme est notée*

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n}} F_i.$$

*et dite **somme directe orthogonale** des F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

II.3 Orthogonal d'une partie

33.1 ✍ *Soit A, une partie de E. L'**orthogonal** de A, noté $A^\perp$, est défini par*

$$A^\perp = \big\{x \in E \,:\, \forall\, y \in A,\ (x \mid y) = 0\big\}.$$

33.2 Exemples fondamentaux

$$E^\perp = \{0\} \qquad\qquad \{0\}^\perp = E$$

33.3 ➙ *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si, et seulement si, $G \subset F^\perp$.*

33.4 Pour tout sous-espace vectoriel F,

$$F \subset (F^\perp)^\perp.$$

33.5 ➙ **Contravariance**

Si F et G sont deux sous-espaces tels que $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.

34. Utilisation de familles génératrices

Si le sous-espace F est engendré par la famille $(e_i)_{i \in I}$, alors

$$x \in F^\perp \iff \forall\, i \in I, \quad (x \mid e_i) = 0.$$

En particulier,

$$\big[\mathrm{Vect}(e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)\big]^\perp = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \cdot e_i)^\perp.$$

35. ➙ *L'orthogonal $A^\perp$ d'une partie quelconque A est un sous-espace vectoriel de E.*

36. Pour toute partie A de E,

$$A^\perp = [\mathrm{Vect}(A)]^\perp.$$

Entraînement

37. Questions pour réfléchir

1. Deux vecteurs x_1 et x_2 sont égaux si, et seulement si,

$$\forall\, y \in E, \quad (x_1 \mid y) = (x_2 \mid y).$$

2. Soit $u \in L(E)$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \big(\, x \,\big|\, u(x)\,\big) = 0.$$

L'endomorphisme u est-il identiquement nul ?

3. Les vecteurs $u = (1,1)$ et $v = (2,-1)$ ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$. Il existe un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel u et v sont orthogonaux. Discuter l'unicité d'un tel produit scalaire.

4. Le plan étant muni de sa structure euclidienne canonique, trouver trois vecteurs x, y et z tels que

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

La famille (x,y,z) est-elle orthogonale ?

5. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si, et seulement si, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}\cdot x_i$, $i \in I$, sont deux à deux orthogonaux.

6. Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux, alors

$$\forall\, 1 \leqslant i < n, \quad (F_1 \oplus \cdots \oplus F_i) \perp (F_{i+1} \oplus \cdots \oplus F_n).$$

7. Condition sur $A \subset E$ pour que $A^\perp = E$.

8. Soient F et G, deux sous-espaces de E.

8.a
$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$$

8.b
$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

9. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dits **perpendiculaires** lorsque $F^\perp \subset G$.

9.a Deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ sont-ils perpendiculaires ?

9.b Deux sous-espaces perpendiculaires de $\mathbb{R}^3$ sont-ils orthogonaux ?

38. L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

1. Orthogonal de la droite $\mathbb{R}\cdot(1,2,-4)$?
2. Orthogonal du plan $[-x+3y+z=0]$?
3. Soit $F = \operatorname{Vect}\big((1,1,-1),\ (2,-1,-3)\big)$. Orthogonal et représentation cartésienne de F.

39. On suppose que $\ell^2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang est réduit à $\{0\}$.

40. On suppose que $\mathscr{L}^2_c([0,1])$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ est réduit à $\{0\}$.

41. Maximalité de l'orthogonal
Soit F, un sous-espace vectoriel de E.

1. Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux : $F \perp F^\perp$.
2. Le sous-espace $F^\perp$ est le plus grand sous-espace orthogonal à F, au sens où tout sous-espace orthogonal à F est contenu dans $F^\perp$.

III

Projections orthogonales

42. On considère un sous-espace vectoriel F de E, arbitrairement fixé.

43. Le problème du supplémentaire orthogonal
Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont en somme directe [**32.2**], mais la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ n'est définie que si l'orthogonal de F est un supplémentaire de F dans E.

43.1 ➞ *Soit F, un sous-espace vectoriel de E. S'il existe un sous-espace vectoriel G tel que*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} G,$$

alors $G = F^\perp$.

43.2 ✍ *Si $E = F \oplus F^\perp$, on dit que $F^\perp$ est* ***le supplémentaire orthogonal de*** *F.*

43.3 Si $E = F \oplus F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

44. On suppose que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique [**5.3**]. L'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques admet l'espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques pour supplémentaire orthogonal.

Projecteurs orthogonaux

45.1 Soit $p \in L(E)$ tel que $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$. Si E est un espace de dimension finie, alors

$$E = \operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} p$$

et, en particulier, $(\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Im} p$ et $(\operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Ker} p$.

45.2 ✍ *Un projecteur p est un* ***projecteur orthogonal*** *lorsque*

$$\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p.$$

45.3 Si p est un projecteur orthogonal, alors

$$E = \operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Im} p \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} p)^\perp,$$

que la dimension de E soit finie ou non.

45.4 ➞ *Si E admet une décomposition en somme directe orthogonale :*

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant n}} F_k,$$

alors les projections associées à cette décomposition de E sont des projecteurs orthogonaux.

46. Caractérisation des projecteurs orthogonaux

46.1 Si p est un projecteur, alors $x \in \operatorname{Im} p$ si, et seulement si, $p(x) = x$.

46.2 Un projecteur p est un projecteur orthogonal si, et seulement si,

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, p(x) \,\big|\, y - p(y)\,\big) = 0.$$

46.3 ➞ *Soit p, un projecteur. Alors p est un projecteur orthogonal si, et seulement si,*

$$\forall\, (x,y) \in E \times E, \quad \big(\, p(x) \,\big|\, y\,\big) = \big(\, x \,\big|\, p(y)\,\big).$$

47. Projections orthogonales

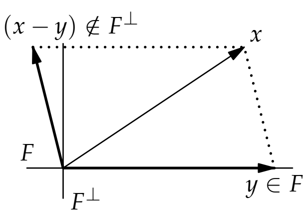
47.1 ✍ *Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la* ***projection orthogonale sur*** *F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.*

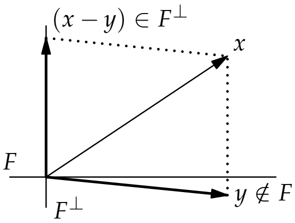
47.2 La projection orthogonale sur F, si elle existe, est un projecteur orthogonal.

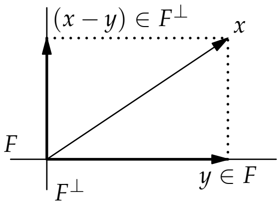
47.3 Si p est un projecteur orthogonal, alors p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p$.

47.4 → Caractérisation du projeté orthogonal
On suppose que $E = F \oplus F^\perp$. Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est l'unique vecteur $y \in E$ qui soit solution du système suivant.

$$\begin{cases} x - y \in F^\perp \\ \quad\ y \in F \end{cases}$$







47.5 Soit $(e_1, \dots, e_q)$, une base de F. Alors

$$(x-y) \in F^\perp \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant q, \quad (\, y \,|\, e_k\,) = (\, x \,|\, e_k\,)$$

et

$$y \in F \iff \exists\, (\alpha_k)_{1\leqslant k \leqslant q} \in \mathbb{R}^q, \quad y = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \cdot e_k.$$

Le calcul de la projection sur F revient ainsi à inverser une matrice de Gram. →**[92.6]**

Caractérisation des projections orthogonales

48. Soit $z_t = x_0 + t y_0$ pour $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\min_{u\in\mathbb{R}} \|z_u\|^2 = \|x_0\|^2 - \Big[\frac{(\, x_0 \,|\, y_0\,)}{\|y_0\|}\Big]^2 \leqslant \|x_0\|^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

49. → *On suppose que $E = F \oplus G$ et que p est la projection sur F parallèlement à G. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

49.1 *La projection p est un projecteur orthogonal : $G = F^\perp$.*

49.2
$$\forall\, x \in E, \quad p(x) \perp x - p(x).$$

49.3
$$\forall\, x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\|.$$

Entraînement

50. Questions pour réfléchir

1. Interprétation géométrique de la relation $(F^\perp)^\perp = F$ en dimension 2.
2. On suppose que $E = F \oplus F^\perp$ et on considère un sous-espace G.
   2.a Comparer $(F \cap G) \oplus (F^\perp \cap G)$ et G.
   2.b Si $F \subset G$ et si $G \cap F^\perp = \{0\}$, alors $G = F$.
3. Un endomorphisme p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, l'endomorphisme $q = \mathrm{I}_E - p$ est un projecteur orthogonal.
4. On suppose que $E = F \oplus F^\perp$. Si $v \in F$ et $u - v \perp v$, le vecteur v est-il le projeté orthogonal de u sur F ?

51. Si un sous-espace F et son orthogonal $F^\perp$ sont supplémentaires l'un de l'autre dans un espace de dimension finie, il n'en va pas toujours de même dans un espace de dimension infinie.
On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(\, f \,|\, g\,) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

51.1 On considère le sous-espace vectoriel F constitué des fonctions polynomiales sur $[-1,1]$.

1. Pour tout $f \in E$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F tels que $\|f - g_n\|$ tende vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Si $f \in F^\perp$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\, f \,|\, g_n\,) = 0,$$

donc $F^\perp = \{0_E\}$ et $(F^\perp)^\perp = E$.

51.2 Le sous-espace G_- des fonctions de E qui sont nulles sur $[-1,0]$ est l'orthogonal du sous-espace G_+ des fonctions de E qui sont nulles sur $[0,1]$. Les sous-espaces G_+ et G_- sont-ils supplémentaires dans E ?

52. *Suite de* **[47.4]** –

52.1 Si l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique, le projeté orthogonal d'une matrice M sur le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est la matrice

$$\frac{1}{2}(M + {}^tM).$$

52.2 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer le projeté orthogonal de $x = (1,-2,3)$ sur le plan F dirigé par $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (-1,2,1)$.

53. L'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\, f \,|\, g\,) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère les sous-espaces vectoriels

$$A = \{f \in E \,:\, f'' = f\} \quad \text{et} \quad B = \{f \in E \,:\, f(1) = f(0) = 0\}$$

ainsi que le sous-espace affine

$$H = \{f \in E \,:\, f(1) = 1,\ f(0) = \operatorname{ch} 1\}.$$

53.1 Le couple $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ est une base de A. Comme

$$\forall\, f \in A,\ \forall\, g \in E, \quad (\, f \,|\, g\,) = f'(1)g(1) - f'(0)g(0)$$

on a : $(\, \operatorname{ch} \,|\, \operatorname{sh}\,) = \operatorname{sh}^2 1$ et $\|\operatorname{ch}\|^2 = \|\operatorname{sh}\|^2 = \operatorname{sh} 2/2$.

53.2 La fonction f_0 définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = \operatorname{ch}(1-x)$$

appartient à A et à H.

53.3 Les sous-espaces A et B sont orthogonaux et supplémentaires dans E. Le projeté orthogonal de $f \in E$ sur le sous-espace A est défini par

$$\pi(f) = \frac{f(1) - f(0)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} \cdot \operatorname{sh} + f(0) \cdot \operatorname{ch}.$$

En particulier, si $f \in H$, alors $\pi(f) = f_0$.

53.4 Lorsque f parcourt H, l'expression

$$q(f) = \int_0^1 [f(t)]^2 + [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

est minimale pour $f = f_0$ et $q(f_0) = \operatorname{sh} 2/2$.

IV

Bases orthonormées

IV.1 Projections orthogonales

54. Soit F, un sous-espace vectoriel de E dont on connaît une base orthonormée $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$.

54.1 Pour tout $x \in E$, le vecteur

$$p(x) = \sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\; e_k$$

appartient à F et le vecteur $x - p(x)$ appartient à $F^\perp$, si bien que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

54.2 ➙ *Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$, les projetés orthogonaux de x sur F et sur $F^\perp$ sont respectivement*

$$\sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\; e_k \qquad \textit{et} \qquad x - \sum_{k=1}^{r} (\, e_k \,|\, x \,)\; e_k.$$

54.3 ▷ *Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une base* orthogonale *de F, alors le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est le vecteur*

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(\, u_k \,|\, x \,)}{\|u_k\|^2}\, u_k.$$

55. Traduction matricielle

Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E.

55.1 ➙ *Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F, alors la matrice relative à $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F est égale à*

$$\sum_{k=1}^{r} V_k\, {}^tV_k$$

où $V_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(e_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

55.2 ▷ *Si $(u_1, \dots, u_r)$ est une base orthogonale de F, alors la matrice relative à $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur F est égale à*

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{U_k\, {}^tU_k}{{}^tU_k U_k}$$

où $U_k = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

56. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des projections orthogonales :

1. sur la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 2, -1)$;
2. sur la droite $[x + 3y - z = 0] \cap [2x - y + z = 0]$;
3. sur le plan $[x + y - 3z = 0]$;
4. sur le plan engendré par $u_1 = (1, 2, 2)$ et $u_2 = (-2, 0, 1)$;
5. sur le plan engendré par $v_1 = (1, 2, 3)$ et $v_2 = (-1, 2, 1)$.

57. Inégalité de Bessel

57.1 Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, alors

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} (\, e_k \,|\, x \,)^2 \leqslant \|x\|^2$$

avec égalité si, et seulement si, x appartient au sous-espace engendré par $(e_1, \dots, e_n)$. →**[81.1]**

57.2 ➙ *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Alors, pour tout $x \in E$, la série numérique $\sum (\, e_k \,|\, x \,)^2$ converge et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\, e_k \,|\, x \,)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

57.3 Le cas d'égalité est l'objet du théorème de Parseval **[81.3]**.

IV.2 Algorithme de Gram–Schmidt

58. Principe

On considère un sous-espace F d'un espace préhilbertien réel E. On suppose que

Si F est un espace de dimension finie, il admet une base $(x_1, \dots, x_d)$. Dans le cas contraire, on suppose que F admet une base dénombrable $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Dans ces deux cas, l'algorithme de Gram–Schmidt construit par récurrence une base orthonormée de F.

59. Itération

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$F_n = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

59.1 On suppose connue une base orthonormée de F_n :

$$F_n = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n)$$

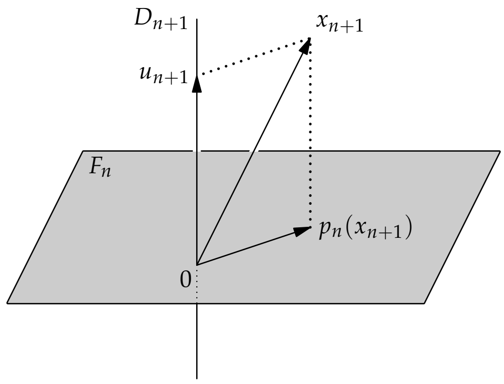
et, le vecteur x_{n+1} n'appartenant pas à F_n, on considère un vecteur de la forme

$$y_{n+1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k \Big) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

59.2 Le vecteur y_{n+1} appartient au sous-espace F_n si, et seulement si, $\lambda_{n+1} = 0$.

59.3 En particulier, si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $y_{n+1} \neq 0$ et dans ce cas $F_{n+1} = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$.

59.4



Le vecteur y_{n+1} est orthogonal à F_n si, et seulement si,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_k = -\lambda_{n+1}\, (\, x_{n+1} \,|\, y_k \,).$$

59.5 Le vecteur y_{n+1} est orthogonal à F_n et unitaire si, et seulement si,

$$y_{n+1} = \pm \frac{u_{n+1}}{\|u_{n+1}\|} \quad \text{où} \quad u_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (\, x_{n+1} \,|\, y_k \,)\; y_k.$$

60. ➙ **Conclusion**

Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants, il existe une famille orthonormée $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n).$$

61. Drapeau associé à l'algorithme de Gram-Schmidt

Soient $\mathscr{B}_x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $\mathscr{B}_y = (y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, deux bases de E telles que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k).$$

61.1 Les deux matrices de passage

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_x \to \mathscr{B}_y) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_y \to \mathscr{B}_x)$$

sont triangulaires supérieures.

61.2 Si les coefficients diagonaux de l'une de ces matrices sont tous strictement positifs, alors les bases $\mathscr{B}_x$ et $\mathscr{B}_y$ ont même orientation.

IV.3 Existence de bases orthonormées

62. ➞ *Un espace préhilbertien réel de dimension dénombrable admet (au moins) une base orthonormée.*

63. ➞ *Un espace euclidien admet (au moins) une base orthonormée.*

64. ➞ *Soit F, un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien réel E.*

64.1 *L'orthogonal $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.*

$$\operatorname{codim} F^\perp = \dim F$$

64.2 *La projection orthogonale sur F est bien définie.*

65. ➞ **Conservation de l'orientation**
Un espace euclidien orienté admet une base orthonormée directe.

66. **Théorème de la base orthonormée incomplète**

66.1 ➞ *Pour tout sous-espace F de E, espace euclidien, il existe une base orthonormée de E adaptée à F.*

66.2 Une base orthonormée adaptée à un sous-espace F est aussi adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

66.3 ▷ *Si E est un espace euclidien, alors*

$$E = F \oplus F^\perp \quad \textit{et} \quad (F^\perp)^\perp = F$$

pour tout sous-espace vectoriel F de E.

Entraînement

67. **Questions pour réfléchir**

1. Soient $y \in F$, $z \in F^\perp$ et $x = y + z$.

1.a Quelles sont les coordonnées de y relatives à la base $\mathscr{B}_F$?

1.b Comparer ces coordonnées avec les scalaires $(e_k \,|\, x)$.

2. Décrire les bases orthonormées qui résultent de l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à :

2.a une famille orthogonale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

2.b une famille orthonormée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Condition pour qu'une matrice soit triangulaire et orthogonale.

4. Soit $\mathscr{B}$, une base de F, sous-espace de dimension finie. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}^\perp$ de F qui a même orientation que F.

5. On considère des sous-espaces $F_1, \dots, F_r$ en somme directe orthogonale et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, une base orthonormée $\mathscr{B}_k$ de F_k. Alors la famille $\mathscr{B}_1 \oplus \mathscr{B}_2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{B}_r$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel

$$F = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r.$$

68. On considère une famille libre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; une famille orthonormée $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on en déduit par l'algorithme de Gram–Schmidt et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Vect}(x_0, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}(u_0, \dots, u_n).$$

Alors $u_n = \pm\varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

69. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. L'application φ définie par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

2. Il existe une base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de E qui est orthonormée pour φ telle que $\deg P_k = k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ et

$$\forall\, 0 \leqslant j, k \leqslant n, \quad P_k^{(j)}(a_j) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } j \neq k, \\ \pm 1 & \text{si } j = k. \end{array}\right.$$

70. **Inégalité d'Hadamard**

1. Soit $X = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$, la matrice colonne qui représente un vecteur u dans une base orthonormée.
Alors $\|u\|^2 = {}^tXX$ et $\|u\| \geqslant |X_k|$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|$$

71. Soit u, un endomorphisme de E, espace euclidien. On suppose que

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q(t) = \|x + ty\|^2 - \|u(x + ty)\|^2 \geqslant 0$$

donc

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - \mathrm{I}).$$

V

Distance à un sous-espace

72.1 ✍ *Soit F, un sous-espace vectoriel de E. La* ***distance d'un point*** *$x \in E$* ***au sous-espace*** *F est définie par*

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y\in F} \mathrm{d}(x, y).$$

72.2 La distance d'un point de E à un sous-espace vectoriel de E est bien définie.

72.3 Il existe une suite bornée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F tels que

$$\mathrm{d}(x, F) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x, y_n).$$

72.4 La distance $\mathrm{d}(x, F)$ est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers x.

72.5 ✍ *Le sous-espace F est* ***dense*** *dans E lorsque tout vecteur x de E est limite d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F.*

72.6 Le sous-espace F est dense dans E si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in F, \quad \|x - y\| \leqslant \varepsilon.$$

73. ➞ *Si le sous-espace F est dense dans E, alors le vecteur nul est le seul vecteur de E qui soit orthogonal à F :*

$$F^\perp = \{0\}.$$

74. ✍ *Une suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***totale*** *lorsqu'elle engendre un sous-espace dense dans E :*

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in \operatorname{Vect}(u_n, n \in \mathbb{N}), \quad \|x - y\| \leqslant \varepsilon.$$

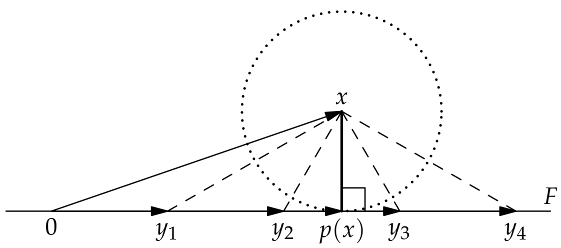
75. ✍ *Une suite totale et orthonormée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est une* ***base hilbertienne**** *de E.*

76. **Caractérisation métrique du projeté orthogonal**

76.1 Si $E = F \oplus F^\perp$, alors

$$\forall\, (x, y) \in E \times F, \quad \|x - y\| \geqslant \|x - p(x)\|$$

où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.



76.2 ➙ Distance à un sous-espace de dimension finie
Soit F, un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur $y \in F$ tel que $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(x,F)$, de sorte que

$$\mathrm{d}(x,F) = \sqrt{\,(\,x \mid x - p_F(x)\,)\,} = \min_{y \in F} \mathrm{d}(x,y).$$

76.3 Distance à un hyperplan
Soit H, un hyperplan de E. S'il existe un vecteur $n \in E$ tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot n,$$

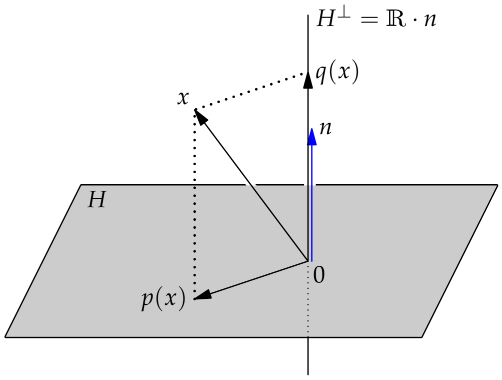
alors le projeté orthogonal de $x \in E$ sur H est le vecteur

$$p(x) = x - \frac{(\,n \mid x\,)}{\|n\|^2} \cdot n$$

et la distance de x à H est donnée par :

$$\mathrm{d}(x,H) = \frac{|\,(\,x \mid n\,)\,|}{\|n\|}.$$

Cette distance $\mathrm{d}(x,H)$ est nulle si, et seulement si, $x \in H$.



Approximation au sens des moindres carrés

77. L'espace $E = \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Étant donné $y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'équation matricielle

$$Ax = y_0$$

d'inconnue $x \in E$, avec $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes : $\mathrm{rg}\, A = p$.
77.1 Si $n = p$, alors A est inversible et l'équation admet une seule solution, égale à $A^{-1}y_0$.
77.2 ✍ *La matrice colonne $x_0 \in E$ est dite* ***solution approchée au sens des moindres carrés*** *lorsque*

$$\|y_0 - Ax_0\| = \inf_{x \in E} \|y_0 - Ax\|.$$

77.3 On suppose que $n > p$.
1. L'équation admet au plus une solution $x_0 \in E$.
2. L'équation admet une, et une seule, solution approchée au sens des moindres carrés : l'unique vecteur $x_0 \in E$ tel que Ax_0 soit le projeté orthogonal de y_0 sur le sous-espace $\mathrm{Im}\, A$.
3. Ce vecteur x_0 est l'unique solution de l'équation

$$^tAAx = {}^tAy_0.$$

4. Si $^tAAx = 0$, alors $\|Ax\| = 0$, donc la matrice ^tAA est inversible. La matrice $(^tAA)^{-1}\,{}^tA$ est parfois appelée **pseudo-inverse** de A.

78. Application : droite de régression
On considère deux statistiques réelles $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. On note respectivement s_x, s_y, s_{x^2} et s_{xy}, les moyennes arithmétiques des statistiques suivantes :

$$(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}, \quad (y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}, \quad (x_k^2)_{1 \leqslant k \leqslant n} \quad \text{et} \quad (x_k y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

78.1 Chercher la droite $y = ax + b$ telle que l'erreur quadratique

$$\varepsilon(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$$

soit minimale revient à chercher la solution approchée au sens des moindres carrés du système

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

78.2 Cette solution approchée est :

$$a_0 = \frac{s_{xy} - s_x s_y}{s_{x^2} - (s_x)^2}, \quad b_0 = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{s_{x^2} - (s_x)^2} = s_y - a_0 s_x.$$

78.3 Il ne revient pas au même de minimiser $\varepsilon(a,b)$ et

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \alpha y_k - \beta)^2$$

puisqu'on obtient, en général, deux droites distinctes.

Familles totales de polynômes orthogonaux

79. Le théorème de Weierstrass [**11.51.1**] assure que toute fonction continue sur un segment est la limite pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, mais ne donne pas de méthode pour construire une telle suite de fonctions polynomiales.
80. Pour certaines moyennes quadratiques, le théorème de Parseval [**81.3**] explicite une suite de fonctions polynomiales qui converge vers une fonction continue donnée.
81. Théorème de Parseval
On considère un sous-espace F muni d'une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n),$$

de telle sorte que le projeté orthogonal de x sur F_n est

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\,e_k \mid x\,) \cdot e_k.$$

81.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (\,e_k \mid x\,)^2 = \|x - p_n(x)\|^2$$

et en particulier, la suite de terme général $\|x - p_n(x)\|$ est décroissante.
81.2 Pour tout vecteur $y \in F$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_{n_0}$ et

$$\|x - y\|^2 \geqslant \|x - p_{n_0}(x)\|^2 \geqslant \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} (\,e_k \mid x\,)^2.$$

81.3 ➞ *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée de E et F, le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Alors*

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, e_n \mid x \,)^2$$

si, et seulement si, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale et, dans ce cas, la suite des projetés orthogonaux de x

$$\sum_{k=0}^{n} (\, e_k \mid x \,) \cdot e_k$$

converge vers x.

81.4 ▷ **Forme polarisée**
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée totale de E. Alors

$$(\, x \mid y \,) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, x \mid e_n \,)\,(\, e_n \mid y \,)$$

quels que soient x et y dans E.

82. Approximation par des polynômes orthogonaux
Soit K, une fonction continue, strictement positive et intégrable sur l'intervalle borné $]a, b[$.

82.1 L'application définie par

$$(\, f \mid g \,) = \int_a^b f(t)g(t)K(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

82.2 Comme

$$\forall\, f, g \in E, \quad \|f - g\| \leqslant \sqrt{\int_a^b K(x)\,\mathrm{d}x}\,\|f - g\|_\infty$$

le sous-espace F des fonctions polynomiales est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

82.3 La suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de F est une famille totale et

$$\forall\, f \in E, \quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} (\, P_n \mid f \,)\, P_n$$

au sens où

$$\Big\| f - \sum_{n=0}^{N} (\, P_n \mid f \,)\, P_n \Big\| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

82.4 Exemples
Les **polynômes de Legendre** sont les polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associés au noyau défini par

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad K(x) = 1$$

et les **polynômes de Tchebychev** sont associés au noyau défini par →[**88**]

$$\forall\, x \in]-1, 1[\,, \quad K(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Entraînement

83. Questions pour réfléchir

1. Si la distance du vecteur x au sous-espace F est nulle, le vecteur x appartient-il à F ?
2. *Suite de* [**76.3**] – S'il existe un vecteur $u \in E$ tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot u,$$

alors l'hyperplan H n'est pas dense dans E.

3. Soit F, un sous-espace vectoriel de E. Si, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = 0,$$

alors $F^\perp = \{0\}$.

4. *Suite de* [**81.3**] – Un vecteur x appartient au sous-espace F_n si, et seulement si,

$$\forall\, k > n, \qquad (\, e_k \mid x \,) = 0.$$

84. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$.

84.1 L'ensemble H défini par

$$H = \Big\{ P \in E \;:\; \int_1^2 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Big\}$$

est un sous-espace de E.

84.2 On définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle\, P \mid Q \,\rangle = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_k$$

quels que soient les polynômes

$$P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k.$$

L'orthogonal de H pour ce produit scalaire est la droite dirigée par le polynôme

$$P_0 = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^{k+1} - 1}{k+1}\, X^k.$$

En déduire la distance du monôme 1 au sous-espace H.

85. Soient $a_0, \ldots, a_n$, des réels.

85.1 À quelle condition sur les réels $a_0, \ldots, a_n$ l'expression

$$(\, P \mid Q \,) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$?

85.2 L'orthogonal du sous-espace

$$F = \Big\{ P \in E \;:\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \Big\}$$

est la droite vectorielle dirigée par le monôme 1.

85.3 La distance du monôme X^n au sous-espace F est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \Big|.$$

86. Calculs de distance
Les formules suivantes peuvent être interprétées comme les distances d'un point à un sous-espace pour divers produits scalaires. On peut ainsi déterminer le point où le minimum est atteint [**47.5**], puis en déduire la valeur du minimum [**76.3**].

86.1

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 36$$

Le minimum est atteint en $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

86.2

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{175}$$

Le minimum est atteint en $(a, b, c) = (0, 3/5, 0)$.

86.3

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(\sqrt{t}-a-bt\right)^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}$$

Le minimum est atteint en $(a,b) = ({}^{3\pi}/_{32}, {}^{15\pi}/_{64})$.

86.4 La fonction φ définie par

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \varphi(x,y) = \int_0^1 t^2(\ell n\, t - xt - y)^2\,\mathrm{d}t$$

atteint son minimum global en $(x,y) = ({}^5/_3, -{}^{19}/_{12})$.

87. L'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

87.1 La distance de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à $\sqrt{11}$.

87.2 L'ensemble $H = [\mathrm{tr}(M) = 0]$ est un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et la distance de I_3 à cet hyperplan est égale à $\sqrt{3}$.

88. Polynômes de Tchebychev

Soient E, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et F, le sous-espace constitué des fonctions polynomiales.

88.1 On définit un produit scalaire sur E en posant

$$(\,f\,|\,g\,) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

88.2 Toute fonction continue f est limite (pour la norme associée à ce produit scalaire) d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à F.

88.3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n = 0.$$

88.4 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme T_n est un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes dans $[-1,1]$.

88.5 Considérée comme une famille de vecteurs de F, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

88.6

$$\forall\, f\in E,\quad f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\,T_n\,|\,f\,)}{\|T_n\|^2}\,T_n$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

89. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de famille (x,y,z) non orthogonale telle que

$$\|x+y+z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

2. Exemple de sous-espace $F\neq E$ tel que $F^\perp = \{0\}$.

90. Méthodes

1. Comment démontrer que deux sous-espaces sont orthogonaux ?
2. On considère un espace euclidien E.

2.a Comment trouver la matrice qui représente la projection orthogonale sur un sous-espace F dont on connaît une base orthonormée ? une base orthogonale ? une base quelconque ?

2.b Considérer le cas où F est un hyperplan représenté par une équation cartésienne.

3. En quoi l'algorithme de Gram–Schmidt peut-il être utile pour calculer la distance d'un point à un sous-espace ? Comment peut-on s'en passer ?

Approfondissement

91. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\,P\,|\,Q\,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$P_n = X^n(1-X)^n \quad\text{et}\quad L_n = P_n^{(n)}.$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme L_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à $(-1)^n\,{}^{(2n)!}/_{n!}$.
2. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$.

2.a Si $P(0) = P(1) = 0$, alors $(\,P'\,|\,Q\,) = -(\,P\,|\,Q'\,)$.

2.b Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(\,L_n\,|\,Q\,) = (-1)^n(\,P_n\,|\,Q^{(n)}\,)$.

3. La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

92. Matrices de Gram

Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

92.1 ✍ *La **matrice de Gram** de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est définie par*

$$G(u_1,\dots,u_p) = \big(\,(\,u_i\,|\,u_j\,)\,\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}).$$

92.2 Une matrice de Gram est symétrique.

92.3 Si P est la matrice de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ relative à une base orthonormée, alors

$$G(u_1,\dots,u_p) = {}^tPP.$$

92.4 Si la matrice colonne $X = (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifie $GX = 0$, alors ${}^tXGX = 0$ et

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E.$$

92.5 ➝ *La matrice de Gram $G(u_1,\dots,u_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre.*

92.6 Projection orthogonale

On note $G = G(u_1,\dots,u_p)$. Le projeté orthogonal de $x\in E$ sur le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est le vecteur

$$y = \sum_{k=1}^p \alpha_k\cdot u_k \quad\text{où}\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_p\end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix}(\,x\,|\,e_1\,)\\ \vdots\\ (\,x\,|\,e_p\,)\end{pmatrix}.$$

93. Distance à un hyperplan

On peut utiliser les matrices de Gram pour calculer la distance d'un point à un hyperplan en suivant la démarche de l'algorithme de Gram–Schmidt mais sans expliciter de base orthogonale.

93.1 Soit $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$, une famille libre. Le sous-espace

$$F_p = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$$

est un hyperplan du sous-espace

$$F_{p+1} = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p,u_{p+1}).$$

1. Si u_{p+1} est orthogonal à F_p, calculer la distance d'un vecteur $x\in F_{p+1}$ à F_p.
2. Si u_{p+1} n'est pas orthogonal à F_p, comment utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour calculer la distance d'un vecteur $x\in F_{p+1}$ à F_p ?

93.2 On note

$$\gamma_p = \det G(u_1, \dots, u_p) \quad \text{et} \quad \gamma_{p+1} = \det G(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}),$$

les déterminants de deux matrices de Gram et on considère le vecteur

$$v_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

3.a On peut choisir les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad (\, u_k \,|\, v_{p+1} \,) = 0.$$

3.b L'opération

$$C_{p+1} \leftarrow C_{p+1} - (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p)$$

sur la matrice $G(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ montre que

$$\gamma_{p+1} = \gamma_p \;(\, v_{p+1} \,|\, u_{p+1} \,) = \gamma_p \, \|v_{p+1}\|^2.$$

4. La distance du vecteur $x = u_{p+1}$ au sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est donnée par

$$\gamma_{p+1} = \gamma_p \cdot \big[\, \mathrm{d}(x, F)\big]^2.$$

94. Deux familles de vecteurs $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ et $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ sont **bi-orthogonales** lorsque

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad (\, u_i \,|\, v_j \,) = \delta_{i,j}.$$

94.1 Deux familles bi-orthogonales sont libres.
94.2 **Base duale**
Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une, et une seule, base $\mathscr{C}$ telle que les familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ soient bi-orthogonales.
Étudier le cas où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.
94.3 On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe deux familles bi-orthogonales $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ telles que

$$A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i {}^t V_i$$

où les λ_i sont tous différents de 0.
1. Les U_i sont des vecteurs propres de A.
2. Le noyau de A est l'orthogonal de $\operatorname{Vect}(V_1, \dots, V_r)$.
3. La matrice A est diagonalisable.
4. Réciproquement, toute matrice diagonalisable de rang r admet une telle décomposition.

Pour aller plus loin

95. **Questions pour réfléchir**
1. Parmi les propriétés de la norme associée à un produit scalaire, quelles sont celles qui sont communes à toutes les normes ? celles qui sont propres aux normes associées à un produit scalaire ?
2. Condition sur une famille de vecteurs $(u_i)_{i \in I}$ de E pour qu'il existe un produit scalaire sur E tel que cette famille soit orthogonale.
3. Si F admet un supplémentaire orthogonal, alors F est un sous-espace vectoriel fermé de E.
4. Soient $x \in E$ et F, un sous-espace de E.
4.a Condition pour qu'il existe au moins un vecteur $y \in F$ tel que $\mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(x, y)$.
4.b Si un tel vecteur y existe, alors il est unique. →[**19**]
5. *Suite de* [**93**] –
5.a Que représente γ_p lorsque la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale ? Dans le cas général ?
5.b Illustrer la méthode de calcul de distance à un hyperplan de [**93**] par une figure en dimension deux ; en dimension trois.

96.1 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de F qui converge vers un vecteur $\omega \in E$. Alors

$$\forall\, y \in F^\perp, \quad (\, \omega \,|\, y \,) = 0.$$

96.2 Soit $A \subset E$. Condition pour que $A^\perp = \{0_E\}$?
96.3 Soient F et G, deux sous-espaces vectoriels de E. Conditions pour que $F^\perp = G^\perp$?
97. **Caractérisation des projections orthogonales**
Une projection p de E, espace euclidien, est une projection orthogonale si, et seulement si, $|||p||| = 1$ (où $|||\cdot|||$ est subordonnée à la norme associée au produit scalaire sur E).
98. **Critère de Cauchy**
98.1 ✍ *Une suite de vecteurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le* ***critère de Cauchy*** *dans l'espace préhilbertien $(E, \|\cdot\|)$ lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, p \geqslant n \geqslant N_0, \quad \|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon.$$

98.2 Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy.
98.3 ✍ *Un* ***espace de Hilbert*** *est un espace préhilbertien $(E, \|\cdot\|)$ dans lequel toute suite qui vérifie le critère de Cauchy est convergente.*