Réduction des endomorphismes [136]

[136.1] On sait que
$$\sum_{i=1}^{r} A_i Q_i = 1.$$
D'après la propriété de morphisme d'algèbres,
$$I_E = \sum_{i=1}^{r} (A_i Q_i)(u) = \sum_{i=1}^{r} p_i.$$
Par conséquent,
$$\forall\, x \in E, \qquad x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x).$$

[136.2] Pour tout $j \neq i$, le polynôme P_i divise le polynôme Q_j et donc aussi le polynôme $A_i Q_i$. Il existe donc un polynôme $B_{i,j}$ tel que
$$A_i Q_i = B_{i,j} P_i.$$
On en déduit que
$$p_i = (A_i Q_i)(u) = B_{i,j}(u) \circ P_i(u).$$
Si $x \in \operatorname{Ker}[P_i(u)]$, alors $P_i(u)(x) = 0_E$ et donc
$$p_j(x) = B_{i,j}(u)\big[P_i(u)(x)\big] = 0_E.$$
On a ainsi démontré que
$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant r, \quad \operatorname{Ker}[P_i(u)] \subset \operatorname{Ker} p_j.$$

[136.3] Pour démontrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}[P_i(u)]$ sont en somme directe, on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ telle que
$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 0_E \quad \text{et que} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad x_i \in \operatorname{Ker}[P_i(u)].$$

❧ D'après **[136.1]**,
$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant r, \quad x_j = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_j) = p_j(x_j)$$
puisque $x_j \in \operatorname{Ker} p_i$ pour tout $i \neq j$ **[136.2]**.

❧ Soit $1 \leqslant j \leqslant r$. Par linéarité de p_j,
$$0_E = p_j(0_E) = p_j\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} p_j(x_i)$$
et d'après **[136.2]** à nouveau,
$$\sum_{i=1}^{r} p_j(x_i) = p_j(x_j).$$

❧ On a ainsi démontré que
$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant r, \quad x_j = p_j(x_j) = 0_E$$
et donc que les sous-espaces $\operatorname{Ker}[P_j(u)]$ sont en somme directe.

[136.4]

On vient de démontrer que les sous-espces $\text{Ker}[P_i(u)]$ sont en somme directe.

❧ On sait que $P = P_i Q_i$, donc $P(u) = Q_i(u) \circ P_i(u)$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad \text{Ker}[P_i(u)] \subset \text{Ker}[P(u)].$$

On en déduit que

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}[P_i(u)] \subset \text{Ker}[P(u)].$$

❧ Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}[P(u)]$. D'après **[136.1]**,

$$x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x).$$

Par définition des applications p_i,

$$\begin{aligned} P_i(u)\big(p_i(x)\big) &= [A_i(u) \circ (P_i Q_i)(u)](x) \\ &= A_i(u)[P(u)(x)] \\ &= A_i(u)(0_E) && \text{(car } x \in \text{Ker}[P(u)]) \\ &= 0_E && \text{(par linéarité de } A_i(u)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad p_i(x) \in \text{Ker}[P_i(u)].$$

On a ainsi démontré que

$$\text{Ker}[P(u)] \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}[P_i(u)].$$

❧ Finalement, on a prouvé que

$$\text{Ker}[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}[P_i(u)].$$

❧ *Attention*, dans ce contexte, les applications $p_i \in L(E)$ ne sont pas des projecteurs ! En revanche, les endomorphismes induits par restriction des p_i au sous-espace $\text{Ker}[P(u)]$ sont bien des projecteurs...