Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2021/2022 **MP**

Composition de Mathématiques

Le 5 janvier 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

❖ I – Problème ❖

Dans ce sujet, on étudie la matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j^4 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

ainsi que diverses matrices rattachées à M.

1. Démontrer les égalités suivantes.

1. a. $j^4 = j$

1. b. $j^2 = \overline{j} = j^{-1}$

1. c. $j + j^2 = -1$

1. d. $1 + 2j = j - j^2 = i\sqrt{3}$

Partie A. Réduction de M

2. a. Vérifier que

$$\det(M - tI_3) = -3i\sqrt{3} + 3t + i\sqrt{3}t^2 - t^3$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. b. En déduire le polynôme caractéristique χ_0 de la matrice M.

2. c. Le polynôme χ_0 admet-il des racines réelles ?

2. d. En déduire la factorisation de χ_0 en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$.

3. Vérifier que $(j - j^2)$ est une valeur propre de M et caractériser le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

4. Soit λ, une valeur propre *réelle* de M et

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$$

un vecteur propre de M associé à λ.

4. a. Que vaut λ^2 ? En déduire que

$$\frac{-1}{1-\lambda} = \frac{1+\lambda}{2}.$$

4. b. Vérifier que les coordonnées de X vérifient le système suivant.

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ (1+2j-\lambda)y + (1+2j^2+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

4. c. En déduire que $y_0 = z_0$, puis que $x_0 = (1+\lambda)y_0$.

5. Calculer une matrice inversible $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que

$$Q = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6. Calculer le polynôme minimal μ_0 de M.

7. On note respectivement D_0, D_+ et D_-, les sous-espaces propres de M associés aux valeurs propres $i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

7. a. Démontrer que le sous-espace $P_0 = D_+ + D_-$ est un plan et calculer une équation cartésienne de ce plan.

7. b. Vérifier que les sous-espaces D_0 et P_0 sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et caractériser matriciellement la projection sur D_0 parallèlement à P_0.

Partie B. Étude de matrices associées à M

8. On note $M^* \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, la matrice conjuguée de M : les coefficients de M^* sont les conjugués des coefficients de M.

8. a. Comparer les polynômes annulateurs de M^* aux polynômes annulateurs de M.

8. b. En déduire le polynôme minimal de M^*, puis que M^* est diagonalisable.

8. c. Calculer $Q^{-1}M^*Q$, où la matrice Q est la matrice définie au **[5.]**

8. d. Calculer M^4.

9. On considère ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} M & 0_3 \\ 0_3 & M^* \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{C}).$$

9. a. Démontrer que

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(M) & 0_3 \\ 0_3 & P(M^*) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

9. b. En déduire le polynôme minimal de A.

9. c. Expliciter une matrice $Q_0 \in GL_6(\mathbb{C})$ telle que

$$Q_0^{-1}AQ_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

10. Démontrer, en faisant le moins de calculs possibles, que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et donner une matrice diagonale semblable à B.

11. On considère ici la matrice

$$C = \begin{pmatrix} M & I_3 \\ 0_3 & M \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_6(\mathbb{C}).$$

11. a. Calculer C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

11. b. En déduire que

$$P(C) = \begin{pmatrix} P(M) & P'(M) \\ 0_3 & P(M) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

11. c. La matrice C est-elle diagonalisable ?

❖ II – Problème ❖

Partie A.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $x \geqslant 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \ell n\Big(1 + \frac{x}{n}\Big).$$

1. a. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant x - \ell n(1+x) \leqslant x^2.$$

1. b. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

❧ Dans la suite du problème, on notera

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

et en particulier

$$\gamma = S(1).$$

1. c. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ell n\, p + \gamma + o(1)$$

lorsque p tend vers $+\infty$.

1. d. Soit $A > 0$. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, A]$. Que peut-on en déduire ?

2. a. Soit $A > 0$. Démontrer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A[$.

2. b. En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big).$$

2. c. Calculer $S'(1)$.

3. a. Par comparaison avec une intégrale, démontrer que

$$S'(x) \sim \ell n\, x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

3. b. En déduire que

$$\frac{S(x)}{x} \sim \ell n\, x$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement cette propriété.

4. Soient $x \geqslant 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

4. a. Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{p} \big[u_n(x+1) - u_n(x)\big] = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} + \ell n(1+x) - \ell n(p+1+x).$$

4. b. En déduire que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad S(x+1) = S(x) + \gamma + \ell n(1+x).$$

5. On considère la fonction φ définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp\big[-\gamma x + S(x)\big].$$

5. a. La fonction φ peut-elle être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$?

5. b. Vérifier que

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi(x+1) = x\varphi(x).$$

5. c. Démontrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x > 0$. Préciser en particulier la valeur de $\varphi'(1)$.

6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction φ_n définie par

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi_n(x) = \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Démontrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction φ.

Partie B.

On rappelle que la fonction Γ est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

pour tout $x > 0$.

7. a. Démontrer que

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad e^{-t} \geqslant 1 - t.$$

En déduire que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in [0, n], \quad \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \exp(-t).$$

7. b. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\, dt = \Gamma(x)$$

pour tout $x > 0$.

8. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la fonction I_n définie par

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt.$$

8. a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction I_n ?

8. b. Démontrer que

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x I_n(x)$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$.

8. c. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie C.

Dans toute cette partie, on suppose que $0 < x < 1$.

9. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les intégrales impropres

$$a_n = \int_0^1 e^{-t}|\ln t|^n\,dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_1^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n\,dt$$

sont convergentes.

10. Démontrer que la fonction

$$f_x(t) = [t \mapsto \exp(-t + x|\ln t|)]$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t > 0, \quad v_n(t) = \frac{x^n}{n!}\cdot \ln^n t \cdot e^{-t}.$$

Démontrer que, pour tout $u > 1$, la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur le segment $[1/u, u]$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, u > 1, \quad T_n(u) = \int_{1/u}^{u} v_n(t)\,dt.$$

12. a. Démontrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^{u} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,dt$$

pour tout $u > 1$.

12. b. Démontrer que la série de fonctions $\sum T_n$ converge normalement sur $]1, +\infty[$.

13. On rappelle que $0 < x < 1$. Démontrer que

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\cdot e^{-t}(\ln t)^n\right) dt$$

puis que

$$\Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n\,dt\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Partie D.

14. Démontrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + S'(x)$$

puis que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}\, x^k$$

et enfin que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(k)x^k$$

où ζ est la fonction de Riemann :

$$\forall\, y > 1, \quad \zeta(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y}.$$

15. En *admettant* que $\Gamma(1) = 1$, démontrer que

$$\ln \Gamma(x) = -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\zeta(k+1)}{k+1} x^{k+1}$$

pour tout $0 < x < 1$.

16. En déduire le développement limité à l'ordre deux de $x\Gamma(x)$ pour x voisin de 0.

Solution I ❀ Réduction de matrices complexes

1. On doit reconnaître une racine cubique de l'unité :

$$j = e^{2i\pi/3}$$

qui vérifie donc $j^3 = 1$.

1. a. On en déduit que $j^4 = j$ en multipliant les deux membres de l'égalité par j.

1. b. Comme $j^2 \cdot j = 1$, on en déduit aussi que $j^2 = j^{-1}$. D'autre part, comme $|j| = 1$, alors $j^{-1} = \overline{j}$ puisque

$$\forall\, z \in \mathbb{U}, \quad z^{-1} = \overline{z}.$$

1. c. Il est clair que $j \neq 1$. D'après la formule de la somme géométrique,

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0.$$

1. d. D'après **[1.c.]**,

$$1 + 2j = (1 + j) + j = -j^2 + j$$

et d'après **[1.b.]**,

$$j - j^2 = j - \overline{j} = 2i\,\mathfrak{Im}(j) = i\sqrt{3}.$$

Partie A. Réduction de M

2. a. D'après **[1.a.]**,

$$\det(M - tI_3) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 1 & j-t & j^2 \\ 1 & j^2 & \boxed{j-t} \end{vmatrix}.$$

On développe ce déterminant avec la règle de Sarrus (puisqu'on ne cherche pas encore à factoriser le polynôme caractéristique) et on trouve :

$$(1-t)(j-t)^2 + 2j^2 - 2(j-t) - j^4(1-t).$$

On développe alors complètement l'expression et on l'ordonne selon les puissances de t :

$$-3(j - j^2) + [2 - (j + j^2)]t + (2j + 1)t^2 - t^3$$

c'est-à-dire (d'après **[1.c.]** et **[1.d.]**)

$$-3i\sqrt{3} + 3t + i\sqrt{3}t^2 - t^3.$$

2. b. On sait que $\chi_0 \in \mathbb{C}[X]$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \chi_0(t) = \det(tI_3 - M) &= (-1)^3 \det(M - tI_3) \\ &= t^3 - i\sqrt{3}t^2 - 3t + 3i\sqrt{3} \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

Comme $\mathbb{R}$ est un ensemble *infini*, le Théorème d'identification des fonctions polynomiales implique que

$$\chi_0 = X^3 - i\sqrt{3}X^2 - 3X + 3i\sqrt{3}.$$

2. c. Un nombre $t \in \mathbb{R}$ est une racine de χ_0 si, et seulement si,

$$\chi_0(t) = 0 = \underbrace{(t^3 - 3t)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\sqrt{3}(3 - t^2)}_{\in\mathbb{R}}$$

c'est-à-dire $t(t^2 - 3) = 3 - t^2 = 0$ (unicité de la représentation cartésienne d'un nombre complexe). Donc t est une racine réelle de χ_0 si, et seulement si, $t^2 = 3$ ou, autrement dit, les racines réelles de χ_0 sont $\pm\sqrt{3}$.

2. d. Comme $\deg \chi_0 = 3$, ce polynôme admet une troisième racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Le coefficient de degré 2 de χ_0 donne la somme des racines et cette somme est égale à

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} + \alpha = i\sqrt{3}$$

donc la troisième racine de χ_0 est égale à $i\sqrt{3}$.

REMARQUE.— Cela est confirmé par le coefficient constant, qui donne le produit des racines :

$$\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) \times \alpha = 3i\sqrt{3}.$$

❧ Comme χ_0 est un polynôme unitaire de degré 3 dont on connaît trois racines distinctes, on connaît sa factorisation :

$$\chi_0 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})(X - i\sqrt{3}).$$

3. D'après **[2.d.]** et **[1.d.]**, le complexe $j - j^2 = i\sqrt{3}$ est une valeur propre de M.

VARIANTE.— La matrice

$$M - (j - j^2)I_3 = \begin{pmatrix} 1 - j + j^2 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j^2 \\ 1 & j^2 & j^2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible puisque $C_2 - C_3 = 0$. $(\star)$

❧ D'après **[2.d.]**, les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles et la relation $(\star)$ montre que la colonne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de M associé à $(j - j^2)$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}\big(M - (j - j^2)I_3\big) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. a. D'après **[2.c.]**, on a $\lambda^2 = 3$ et donc

$$\frac{-1}{1 - \lambda} = \frac{-(1 + \lambda)}{(1 - \lambda)(1 + \lambda)} = \frac{-(1 + \lambda)}{1 - \lambda^2} = \frac{1 + \lambda}{2}.$$

(On nous prie d'annoncer le retour parmi nous de la quantité conjuguée.)

REMARQUE.— À retenir : il est beaucoup plus simple d'utiliser l'égalité $\lambda^2 = 3$ que de calculer avec une valeur particulière de λ...

4. b. Comme X appartient à $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_3)$, alors

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (j - \lambda)y + j^2 z = 0 \\ x + j^2 y + (j - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

En effectuant les opérations

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{1-\lambda}L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{1-\lambda}L_1$$

on en déduit (avec l'aide de **[4.a.]**) que

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + & y + & z = 0 \\ & (j+\frac{1-\lambda}{2})y + (j^2+\frac{1+\lambda}{2})z = 0 \\ & (j^2+\frac{1+\lambda}{2})y + (j+\frac{1-\lambda}{2})z = 0 \end{cases}$$

Avec l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et en se débarrassant de la dernière équation, on aboutit à

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + & y + & z = 0 \\ & (j-j^2-\lambda)y + (j^2-j+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

4. c. Or $j-j^2-\lambda = 1+2j-\lambda$ par **[1.d.]** et $j^2-j+\lambda = 1+2j^2+\lambda$ par **[1.c.]** De plus,

$$(1+2j-\lambda)+(1+2j^2+\lambda) = 0$$

(encore par **[1.c.]**), ce qui permet de réécrire L_2 sous la forme

$$\underbrace{(1+2j-\lambda)}_{\neq 0}(y-z) = 0$$

ce qui prouve que $y_0 = z_0$. On peut alors déduire de L_1 et de **[4.a.]** que

$$x_0 = \frac{-1}{1-\lambda}(2y_0) = (1+\lambda)y_0.$$

5. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbb{R} = \{\pm\sqrt{3}\}$, on pose

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

en s'inspirant de **[4.c.]** D'après **[4.a.]** et **[1.c.]**,

$$(M-\lambda I_3)X_\lambda = \begin{pmatrix} (1-\lambda^2)+1+1 \\ (1+\lambda)+(j-\lambda)+j^2 \\ (1+\lambda)+j^2+(j-\lambda) \end{pmatrix} = 0$$

ce qui prouve que X_λ est bien un vecteur propre de M associé à λ.

Comme les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles d'après **[2.d.]**, on en déduit que

$$\forall\, \lambda \in \{\pm\sqrt{3}\}, \quad \mathrm{Ker}(M-\lambda I_3) = \mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ D'après **[3.]**, $\mathrm{Ker}(M - i\sqrt{3}I_3) = \mathbb{C}\cdot X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

❧ Avec trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, on dispose d'une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, donc la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} X_{\sqrt{3}} & X_{-\sqrt{3}} & X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3})$$

puisque les colonnes de Q sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ et $i\sqrt{3}$.

6. Depuis **[2.d.]**, on sait que χ_0 est scindé à racines simples et donc que M est diagonalisable. Par conséquent,

$$\mu_0 = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(M)}(X-\lambda) = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})$$

et en particulier $\mu_0 = \chi_0$.

7. a. Les droites D_+ et D_- sont des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, donc elles sont en somme directe et donc

$$\dim P_0 = \dim(D_+ \oplus D_-) = \dim D_+ + \dim D_- = 2.$$

Le sous-espace P_0 est bien un plan vectoriel.

❧ Par **[5.]**, P_0 est engendré par $X_{\sqrt{3}}$ et $X_{-\sqrt{3}}$. Comme

$$X_{\sqrt{3}} \wedge X_{-\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(1+\lambda) \\ (1+\lambda) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le plan P_0 est représenté par l'équation cartésienne

$$-y+z = 0$$

relativement à la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

REMARQUE.— Il faut **toujours préciser** dans quelle base on calcule une équation cartésienne ! Comme l'énoncé n'impose rien, un taupin facétieux aurait pu calculer dans la base de vecteurs propres $(X_{\sqrt{3}}, X_{-\sqrt{3}}, X_0)$... (Dans cette base, le plan P_0 est évidemment représenté par l'équation cartésienne $Z = 0$.)

7. b. D'après **[3.]** et **[5.]**, la droite D_0 est dirigée par le vecteur X_0. Ce vecteur X_0 n'appartient pas au plan P_0 d'après **[7.a.]**, donc le plan P_0 et la droite D_0 sont en somme directe et

$$\dim(P_0 \oplus D_0) = \dim P_0 + \dim D_0 = 3$$

ce qui prouve que P_0 et D_0 sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

$$D_0 \oplus P_0 = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

❧ Pour tout vecteur $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in D_0} + \begin{pmatrix} x \\ y+\alpha \\ z-\alpha \end{pmatrix}.$$

D'après **[7.a.]**, le second terme appartient au plan P_0 si, et seulement si,

$$(y+\alpha)-(z-\alpha) = 0$$

c'est-à-dire $\alpha = (y-z)/2$. Ainsi, le projeté de X sur D_0 parallèlement à P_0 est le vecteur

$$\frac{y-z}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

et la matrice de cette projection **relative à la base canonique de** $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est donc

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Bien entendu, la matrice de cette projection relative à la base de vecteurs propres qu'on a choisie au **[5.]** est

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(mais cela n'a pas grand intérêt).

Partie B. Étude de matrices associées à M

8. a. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de forme développée

$$P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k,$$

on pose

$$P^* = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k^* X^k$$

où α_k^* désigne le conjugué de $\alpha_k \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\begin{aligned}\big[P(M)\big]^* = \Big[\sum_{k=0}^{d}\alpha^k M^k\Big]^* &= \sum_{k=0}^{d}\alpha_k^*(M^*)^k\\ &= P^*(M^*)\end{aligned}$$

puisque, de façon évidente, $(M^*)^k = (M^k)^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme la matrice nulle est égale à sa conjuguée, on en déduit que

$$P(M) = 0_n \iff P^*(M^*) = 0_n.$$

8. b. En particulier, d'après **[8.a.]**, le polynôme μ_0^* est un polynôme annulateur unitaire de M^* (en tant que conjugué d'un polynôme annulateur unitaire de M) et est donc divisible par le polynôme minimal μ_1 de M^*. Réciproquement, pour les mêmes raisons, le polynôme μ_1^* est un polynôme annulateur unitaire de M et est donc divisible par μ_0. On en déduit que

$$\deg \mu_0 = \deg \mu_1$$

et finalement que

$$\mu_1 = \mu_0^* = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X+i\sqrt{3})$$

d'après **[6.]**

❧ Comme le polynôme minimal μ_1 de M^* est scindé à racines simples, la matrice M^* est diagonalisable.

8. c. On reprend les notations du **[5.]** pour les colonnes de la matrice Q.

❧ Pour $\lambda = \pm\sqrt{3}$, comme la valeur propre λ et le vecteur propre X_λ sont *réels*,

$$M^*X_\lambda = M^*X_\lambda^* = (MX_\lambda)^* = (\lambda X_\lambda)^* = \lambda X_\lambda.$$

Comme le vecteur propre X_0 est *réel*, associé à une valeur propre *imaginaire pure*,

$$M^*X_0 = (MX_0)^* = (i\sqrt{3}X_0)^* = -i\sqrt{3}X_0.$$

❧ Les calculs précédents montrent que $(X_{\sqrt{3}}, X_{-\sqrt{3}}, X_0)$ est une base de vecteurs propres de M^* et par conséquent que

$$Q^{-1}M^*Q = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

VARIANTE.— Comme les matrices Q et Q^{-1} sont *réelles*,

$$Q^{-1}M^*Q = (Q^{-1}MQ)^*.$$

8. d. Au moins trois méthodes ! Il suffit bien sûr d'en exposer une seule...

❧ D'après **[5.]**,

$$Q^{-1}M^4Q = (Q^{-1}MQ)^4 = 9I_3$$

et par suite $M^4 = Q(9I_3)Q^{-1} = 9I_3$.

❧ Un calcul direct montre que

$$M^2 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&3\\0&3&0\end{pmatrix}$$

et donc que $M^4 = (M^2)^2 = 9I_3$.

❧ Dernière variante, la plus longue ici, mais aussi la plus susceptible d'être généralisée : d'après **[2.b.]** et **[6.]** (ou le théorème de Cayley-Hamilton),

$$M^3 = i\sqrt{3}M^2 + 3M - 3i\sqrt{3}I_3$$

et donc

$$\begin{aligned}M^4 &= i\sqrt{3}M^3 + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M\\ &= i\sqrt{3}\big[i\sqrt{3}M^2 + 3M - 3i\sqrt{3}I_3\big] + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M\\ &= -3M^2 + 3i\sqrt{3}M + 9I_3 + 3M^2 - 3i\sqrt{3}M\\ &= 9I_3.\end{aligned}$$

9. a. Comme la matrice A est diagonale par blocs,

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad A^k = \begin{pmatrix}M^k & 0_3\\ 0_3 & (M^*)^k\end{pmatrix}$$

et par combinaison linéaire,

$$\sum_{k=0}^{d}\alpha^k A^k = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{d}\alpha_k M^k & 0_3\\ 0_3 & \sum_{k=0}^{d}\alpha_k (M^*)^k\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X],\quad P(A) = \begin{pmatrix}P(M) & 0_3\\ 0_3 & P(M^*)\end{pmatrix}.$$

9. b. D'après la question précédente, P est un polynôme annulateur de A si, et seulement si, P est un polynôme annulateur de M *et* un polynôme annulateur de M^*. L'idéal annulateur de A est donc l'intersection des idéaux annulateurs de M et de M^* :

$$\mathscr{I}_A = \mathscr{I}_M \cap \mathscr{I}_{M^*} = \langle \mu_0 \rangle \cap \langle \mu_0^* \rangle$$

(d'après **[8.b.]**). Par conséquent, le polynôme minimal de A (= le générateur unitaire de l'idéal $\mathscr{I}_A$) est le ppcm de μ_0 et de μ_0^* et donc

$$\mu_A = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})(X-i\sqrt{3})(X+i\sqrt{3}).$$

9. c. Comme le polynôme minimal μ_A est scindé à racines simples, la matrice A est bien diagonalisable. Les calculs du **[8.c.]** vont nous permettre de préciser cela !

❧ Comme la matrice Q est inversible, il est clair que la matrice

$$Q_0 = \begin{pmatrix} X_{\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_{-\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_0 & 0_{3,1} \\ 0_{3,1} & X_{\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_{-\sqrt{3}} & 0_{3,1} & X_0 \end{pmatrix}$$

appartient à $GL_6(\mathbb{C})$.

❧ D'autre part, pour $\lambda = \pm\sqrt{3}$,

$$A\begin{pmatrix} X_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MX_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} X_\lambda \\ 0_{3,1} \end{pmatrix}$$

et

$$A\begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ M^*X_\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_\lambda \end{pmatrix}$$

et de même

$$A\begin{pmatrix} X_0 \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} = i\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ 0_{3,1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_0 \end{pmatrix} = -i\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 0_{3,1} \\ X_0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que les colonnes de Q_0 sont des vecteurs propres de A. Par conséquent,

$$Q_0^{-1}AQ_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}).$$

10. D'après **[1.c.]**, on a

$$B = M + M^*.$$

D'après **[5.]** et **[8.c.]**,

$$\begin{aligned} Q^{-1}BQ &= Q^{-1}MQ + Q^{-1}M^*Q \\ &= \mathrm{Diag}(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0). \end{aligned}$$

11. a. Après quelques tâtonnements (qu'on réserve au brouillon), on finit par conjecturer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad C^k = \begin{pmatrix} M^k & kM^{k-1} \\ 0_3 & M^k \end{pmatrix},$$

conjecture qu'on démontre facilement (mais soigneusement...) par récurrence sur la copie.

11. b. L'expression précédente de C^k est encore valable pour $k = 0$ au sens où :

$$C^0 = I_6 = \begin{pmatrix} M^0 & 0_3 \\ 0_3 & M^0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que, par combinaison linéaire comme au **[9.a.]**,

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(C) = \begin{pmatrix} P(M) & P'(M) \\ 0_3 & P(M) \end{pmatrix}.$$

11. c. On déduit de la question précédente que : si P est un polynôme annulateur de C, alors P et P' sont des polynômes annulateurs de M. Donc les valeurs propres de M sont des racines de P et de P'. En particulier, les valeurs propres de M sont des racines *doubles* du polynôme minimal de C.

Comme le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable est scindé à racines simples, on vient de prouver que la matrice C n'est pas diagonalisable.

Solution II ❀ Sur la fonction Γ

Partie A.

1. a. Comme la fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$, son graphe est situé sous celui de sa tangente au point d'abscisse 1 :

$$\forall\, t > 0, \quad \ln t \leqslant -1 + t$$

et donc $(t \leftarrow 1 + x)$

$$\forall\, x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

❧ Considérons maintenant la fonction

$$\left[x \mapsto \ln(1+x) + x^2\right].$$

Comme

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \frac{-1}{(1+x)^2} + 2 \geqslant 1 > 0,$$

cette fonction est convexe sur $[0, +\infty[$ et son graphe est donc situé au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. Cette tangente est donnée par le développement limité à l'ordre un :

$$\ln(1+x) + x^2 = x + o(x)$$

donc

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) + x^2 \geqslant x.$$

1. b. D'après l'encadrement précédent,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \ \forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série $\sum u_n(x)$ est convergente (Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif).

Autrement dit, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

1. c. D'après la question précédente,

$$\gamma = S(1) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} u_n(1)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{p} u_n(1) = \gamma + o(1)$$

lorsque p tend vers $+\infty$. Or (somme télescopique !)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} u_n(1) &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \ell n(p+1) \\ &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \ell n\, p - \ell n\Big(1+\frac{1}{p}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \ell n\, p + o(1)\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ell n\, p + \gamma + o(1)$$

lorsque p tend vers $+\infty$.

1. d. On reprend l'encadrement établi en **[1.a.]** : pour tout $A > 0$,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0, A], \quad \big|u_n(x)\big| \leqslant \frac{A^2}{n^2}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0, A]$ et ce majorant est le terme général d'une série convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, A]$.

❧ Il est clair que les fonctions u_n sont continues sur $[0, A]$, donc la somme S est continue sur $[0, A]$.

❧ Comme $A > 0$ est arbitrairement choisi, on en déduit que S est continue sur $[0, +\infty[$.

2. a. On a démontré au **[1.b.]** que la série de fonctions $\sum u_n$ convergeait simplement sur $[0, +\infty[$.

Il est clair que chaque fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, n \geqslant 1, \quad u_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [0, A[, \quad \big|u_n'(x)\big| \leqslant \frac{A}{n^2}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in [0, A[$, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0, A[$.

Cela prouve que la somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A[$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < A, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

2. b. Comme A est arbitrairement choisi, cela prouve en définitive que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

2. c. En particulier,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1$$

(nouvelle somme télescopique).

3. a. Soit $x > 0$, *fixé*. La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{x}{t(t+x)}\Big]$$

est continue, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est en $\mathcal{O}(1/t^2)$ lorsque t tend vers $+\infty$). On en déduit *(figure correctement légendée à l'appui !)* que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x\, dt}{t(t+x)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x\, dt}{t(t+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\, dt &= \lim_{A \to +\infty} \Big[\ell n \frac{t}{t+x}\Big]_1^A \\ &= \ell n(x+1)\end{aligned}$$

donc, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant S'(x) - \ell n(x+1) \leqslant \frac{x}{x+1}$$

et en particulier

$$S'(x) = \ell n(x+1) + \mathcal{O}(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Or $\ell n(x+1) = \ell n\, x + o(1)$, donc

$$S'(x) = \ell n\, x + \mathcal{O}(1) = \ell n\, x + o(\ell n\, x) \sim \ell n\, x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

3. b. Sur $[1, +\infty[$, la fonction ℓn est positive. Comme cette fonction n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on déduit de l'équivalence établie à la question précédente que

$$\int_1^x S'(t)\, dt \sim \int_1^x \ell n\, t\, dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Autrement dit,

$$S(x) - S(1) \sim x\, \ell n\, x - x + 1$$

donc

$$S(x) = x\, \ell n\, x + o(x\, \ell n\, x) \sim x\, \ell n\, x$$

et finalement

$$\frac{S(x)}{x} \sim \ell n\, x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

❧ En particulier, $S(x)/x$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, donc le graphe de S présente une branche parabolique d'axe $(0y)$.

4. a. Il suffit de remarquer que

$$u_n(x+1) - u_n(x) = \frac{1}{n} + \ell n(n+x) - \ell n[(n+1)+x]$$

pour déduire la relation par télescopage.

4. b. D'après **[1.b.]**, le membre de gauche converge vers $S(x+1) - S(x)$. Quant au membre de droite, d'après **[1.c.]**, on peut le réécrire sous la forme :

$$\ell n\, p + \gamma + \ell n(1+x) - \ell n(p+1+x) + o(1)$$

lorsque p tend vers $+\infty$. Or

$$\ell n\, p - \ell n(p+1+x) = -\ell n\Big(1+\frac{x+1}{p}\Big) = o(1)$$

lorsque p tend vers $+\infty$, donc

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad S(x+1) - S(x) = \gamma + \ell n(1+x)$$

en faisant tendre p vers $+\infty$.

5. a. D'après **[1.d.]**, la fonction S est continue en 0, donc l'exponentielle tend vers une limite finie non nulle lorsque x tend vers 0 et par conséquent, le quotient tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. La fonction φ ne peut donc pas être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

5. b. D'après **[4.b.]**,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) &= \frac{1}{x+1}\exp\big[-\gamma(x+1) + S(x) + \gamma + \ell n(1+x)\big] \\ &= \frac{1+x}{x+1}\exp\big[-\gamma x + S(x)\big] = x\varphi(x).\end{aligned}$$

5. c. D'après **[2.b.]**, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad \varphi'(x) = \Big(\frac{-1}{x} - \gamma + S'(x)\Big)\varphi(x).$$

❧ Comme $S(1) = \gamma$, alors $\varphi(1) = 1$ et d'après **[2.c.]**,

$$\varphi'(1) = -\gamma.$$

6. Comme $\varphi_n(x)$ est un produit de facteurs strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ell n\, \varphi_n(x) &= x\,\ell n\, n + \sum_{k=1}^{n} \ell n\, k - \sum_{k=0}^{n} \ell n(x+k) \\ &= x\,\ell n\, n - \ell n\, x - \sum_{k=1}^{n} \ell n\Big(1+\frac{x}{k}\Big) \\ &= x\,\ell n\, n - \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \ell n\, x + \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ell n\Big(1+\frac{x}{k}\Big) \\ &= x\,\ell n\frac{n}{n+1} - x\sum_{k=1}^{n} u_k(1) - \ell n\, x + \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\end{aligned}$$

(encore un télescopage !). On déduit alors de **[1.b.]** et du fait que $\gamma = S(1)$ que

$$\forall\, x > 0, \quad \ell n\, \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma x - \ell n\, x + S(x).$$

Par composition de limites, on en déduit que

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\big[-\gamma x - \ell n\, x + S(x)\big] = \varphi(x)$$

pour tout $x > 0$. Autrement dit : la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ.

Partie B.

7. a. Comme exp est convexe sur $\mathbb{R}$, son graphe est situé au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0. Ainsi,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t} \geqslant 1 - t.$$

❧ Pour $t \in [0,n]$, on substitue t/n à t :

$$\forall\, t \in [0,n], \quad e^{-t/n} \geqslant 1 - \frac{t}{n} \geqslant 0$$

et on compose par $[x \mapsto x^n]$, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, t \in [0,n], \quad e^{-t/n} \geqslant \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n.$$

7. b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$g_n = \Big[t \mapsto \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\Big]$$

est continue sur $]0,+\infty[$ (elle tend vers 0 à droite et à gauche de $t = n$).

Pour tout $t > 0$, il est clair que

$$\mathbb{1}_{[0,n]}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et *on sait bien* que

$$\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$.

Enfin, on a montré à la question précédente que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in\,]0,n], \quad 0 \leqslant g_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}.$$

Comme $g_n(t) = 0$ pour tout $t > n$, on en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in\,]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant g_n(t) \leqslant e^{-t}t^{x-1}$$

et comme la fonction $\big[t \mapsto e^{-t}t^{x-1}\big]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (cours sur la fonction Γ) et indépendante de n, la convergence est dominée.

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x).$$

8. a. On considère ici les fonctions

$$g_n = \big[t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}\big].$$

Il est clair que chaque fonction g_n est continue sur $]0,1]$ et donc que la fonction g_n est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de $t = 0$.

Or $g_n(t) \sim t^{x-1}$ lorsque t tend vers 0. Comme la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est intégrable au voisinage de $t = 0$ si, et seulement si, $\alpha > -1$, on déduit du Théorème de comparaison que g_n est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $x > 0$.

8. b. Il suffit d'effectuer le changement de variable affine $u = t/n$ (qui donne $dt = n\,du$).

8. c. Soit $\varepsilon > 0$. On intègre par parties sur le segment $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_\varepsilon^1 (1-t)^n t^{x-1}\,dt$$
$$= -(1-\varepsilon)^n\frac{\varepsilon^x}{x} + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-t)^{n-1}t^x\,dt.$$

Comme $x > 0$, le terme $(1-\varepsilon)^n\varepsilon^x$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Par ailleurs, d'après **[8.a.]**,

$$I_p(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 (1-t)^p t^{y-1}\,dt$$

pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout réel $y > 0$. Par conséquent,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad I_n(x) = \frac{n}{x}\, I_{n-1}(x+1).$$

❧ On déduit de la relation précédente que

$$\forall\, x > 0, \quad I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

(démonstration par récurrence, avec $I_0(x+n) = \frac{1}{x+n}$) puis que (**[8.b.]**)

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n t^{x-1}\,dt = \varphi_n(x).$$

D'après **[7.b.]**, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)$$

et donc que $\Gamma(x) = \varphi(x)$ pour tout $x > 0$ par **[6.]**

Partie C.

9. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$g_n = \big[t \mapsto e^{-t}|\ell n\, t|^n\big]$$

est continue sur $]0, +\infty[$. Lorsque t tend vers 0,

$$g_n(t) \sim |\ell n\, t|^n = o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$$

donc la fonction g_n est intégrable au voisinage de 0. Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$g_n(t) = \ell n^n\, t \cdot e^{-t/2}\cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$

donc la fonction g_n est intégrable au voisinage de $+\infty$. Ainsi, la fonction g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve que les intégrales impropres a_n et b_n sont bien convergentes.

10. Tout d'abord, la fonction f_x est bien continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

❧ Pour $0 < t \leqslant 1$,

$$f_x(t) = \exp(-t - x\,\ell n\, t) = \frac{1}{t^x}e^{-t}$$

et en particulier

$$f_x(t) \sim \frac{1}{t^x}$$

lorsque t tend vers 0. Comme $0 < x < 1$, on en déduit que la fonction f_x est intégrable au voisinage de 0.

❧ Pour $t \geqslant 1$, on a $f_x(t) = t^x e^{-t}$ et donc

$$f_x(t) = t^x e^{-t/2}\cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$$

lorsque t tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction f_x est intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction f_x est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

11. Soit $u > 1$.

❧ La fonction ℓn est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, la fonction $[t \mapsto |\ell n\, t|]$ est décroissante sur $[1/u, 1]$ et croissante sur $[1, u]$, et donc

$$\max_{t\in[1/u,u]} |\ell n\, t| = \ell n\, u = |\ell n\, 1/u|.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [1/u, u], \quad \big|v_n(t)\big| \leqslant \frac{(x\,\ell n\, u)^n}{n!}\, e^{-1/u}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de t. On reconnaît le terme général d'une série de Poisson : il s'agit donc d'une série convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[1/u, u]$.

12. a. D'après la question précédente, la série $\sum v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1/u, u]$ qui converge normalement sur $[1/u, u]$. Par conséquent, la somme de cette série est une fonction continue sur le segment $[1/u, u]$, la série numérique

$$\sum \int_{1/u}^u v_n(t)\,dt = \sum T_n(u)$$

est convergente et enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^u \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,dt$$

(intégration terme à terme pour les séries normalement convergentes sur un intervalle borné).

12. b. Par linéarité de l'intégrale,

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}\,(a_n + b_n) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sum_{n=0}^N \frac{x^n|\ell n\, t|^n}{n!}\,dt.$$

Comme le terme général de la série est *positif*,

$$\forall\, t > 0, \quad e^{-t}\sum_{n=0}^N \frac{x^n|\ell n\, t|^n}{n!} \leqslant e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n|\ell n\, t|^n}{n!} = f_x(t)$$

et comme f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$ (par **[10.]**), on en déduit que

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}\,(a_n + b_n) \leqslant \int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt$$

par positivité de l'intégrale. On a ainsi démontré que les sommes partielles d'une série de terme général positif étaient majorées : la série

$$\sum \frac{x^n}{n!}(a_n + b_n)$$

est donc *convergente*.

❧ Soient $u > 1$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\big|T_n(u)\big| &\leqslant \int_{1/u}^u \frac{x^n}{n!}\,|\ell n\, t|^n e^{-t}\,dt\\ &\leqslant \int_{1/u}^1 \frac{x^n}{n!}\,|\ell n\, t|^n e^{-t}\,dt + \int_1^u \frac{x^n}{n!}\,(\ell n\, t)^n e^{-t}\,dt\\ &\leqslant \frac{x^n}{n!}\,(a_n + b_n)\end{aligned}$$

puisque les deux intégrandes sont des fonctions *positives*. Le majorant trouvé est indépendant de u et, comme on l'a démontré plus haut, c'est le terme général d'une série convergente, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum T_n$ converge normalement sur $]1, +\infty[$.

13. D'après le développement en série entière de la fonction exp,

$$\forall\, t > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\, e^{-t}(\ell n\, t)^n = e^{-t} \exp(x\ \ell n\, t) = t^x e^{-t}$$

donc

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\, e^{-t}(\ell n\, t)^n\, dt.$$

❧ D'après **[9.]**, chaque fonction v_n est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{u \to +\infty} T_n(u) = \int_0^{+\infty} v_n(t)\, dt$$

par composition de limites (puisque l'intégrale impropre est, par définition, une limite).

D'après **[12.b.]**, la série de fonctions $\sum T_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$ (en l'occurence sur $]0, +\infty[$), ce qui permet d'appliquer le Théorème d'interversion des limites :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{u \to +\infty} T_n(u) = \lim_{u \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} v_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\, dt$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ell n\, t)^n\, dt \right) \frac{x^n}{n!} = \Gamma(1+x).$$

REMARQUE.— On sait (**[10.]**) que la fonction f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} |\ell n\, t|^n \frac{x^n}{n!}\, dt = \frac{x^n}{n!}\, (a_n + b_n)$$

ce qui est le terme général d'une série convergente (**[12.b.]**). On pouvait donc aussi invoquer le Théorème lebesguien d'intégration terme à terme.

Partie D.

14. Par **[8.c.]** et **[5.c.]**, la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + S'(x).$$

❧ Par **[2.b.]**, pour tout $x > 0$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}.$$

En particulier, pour $0 < x < 1$, on a $0 < x/n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$, donc (série géométrique !)

$$\begin{aligned} \forall\, 0 < x < 1, \quad S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{-x}{n} \right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}\, x^k. \end{aligned}$$

❧ Pour justifier l'interversion des deux signes $\sum$, il *suffit* de vérifier que la famille $(z_{n,k})_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ définie par

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant 1, \quad z_{n,k} = \frac{(-1)^{k+1} x^k}{n^{k+1}}$$

est sommable.

Tout d'abord, pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, la série géométrique

$$\sum_k |z_{n,k}| = \frac{1}{n} \sum_k \left(\frac{x}{n} \right)^k$$

est convergente (la raison vérifie $0 < x/n < 1$), donc la sous-famille

$$(z_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$$

est sommable.

De plus, en appliquant la formule de la somme géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{+\infty} |z_{n,k}| = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 - x/n} - 1 \right) = \frac{x}{n^2(1 - x/n)}.$$

On en déduit que $\sigma_n = \mathcal{O}(1/n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la famille $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ est sommable.

D'après le premier Théorème de Fubini, la famille $(z_{n,k})_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} z_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,k}.$$

En reconnaissant la fonction ζ, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, 0 < x < 1, \quad S'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k) x^k. \end{aligned}$$

15. On a démontré au **[5.c.]** que φ était de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Par **[8.c.]**, la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Comme l'intégrande est une fonction positive, continue et non identiquement nulle, l'intégrale qui définit $\Gamma(x)$ est strictement positive, ce qui permet d'identifier la quotient Γ'/Γ comme la **dérivée logarithmique** de Γ.

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\, dt = \ell n \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1)} = \ell n\, \Gamma(x)$$

puisque $\Gamma(1) = 1$ (admis par l'énoncé).

❧ Le second membre est la somme de $-1/x$, dont on ne présente plus les primitives, de la constante $-\gamma$ et de la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 (elle converge pour $0 < x < 1$ au moins). Sur l'intervalle ouvert de convergence, la somme d'une série entière peut être primitivée terme à terme. Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \ell n\, \Gamma(x) = K - \ell n\, x - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\zeta(k+1)}{k+1}\, x^{k+1}.$$

Alors, pour $0 < x < 1$,

$$\ell n\big[x\Gamma(x)\big] = K - \gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k}\, x^k.$$

On *sait* que $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ tend vers $\Gamma(1)$ lorsque x tend vers 0 (par continuité de Γ en 1) et que la somme de la série entière tend vers 0 au voisinage de 0 (puisque son terme constant est nul et que son rayon de convergence est strictement positif). Cela prouve que $K = 0$.

16. Le développement limité au voisinage de 0 de la somme d'une série entière s'obtient en tronquant la somme. Ainsi, lorsque x tend vers 0,

$$\ell n\big[x\Gamma(x)\big] = -\gamma x - \frac{\zeta(2)}{2}\, x^2 + o(x^2).$$

En posant

$$u = -\gamma x - \frac{\zeta(2)}{2}\, x^2 + o(x^2),$$

on a $u^2 = \gamma^2 x^2 + o(x^2)$, $u = \mathcal{O}(x)$ et donc $o(u^2) = o(x^2)$. Par conséquent, puisque u tend vers 0,

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) = \exp(u) &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\ &= 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

lorsque x tend vers 0.