Espaces préhilbertiens réels

❧ On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

engendré par les fonctions

$$e_k = \left[t \mapsto t^k\right]$$

pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

L'application

$$\varphi = \left[(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\, dt\right]$$

est un produit scalaire sur E (essentiellement parce que le produit $f(t)g(t)e^{-t}$ est $\mathcal{O}(t^6 e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$).

❧ L'expression

$$\int_0^{+\infty} \left[t^3 - (a + bt + ct^2)\right]^2 e^{-t}\, dt$$

est en fait

$$\left\|e_3 - (ae_0 + be_1 + ce_2)\right\|^2$$

et chercher le minimum de cette expression revient en fait à calculer

$$\left[\,d(e_3, F)\right]^2$$

où $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

D'après le cours **[76.2]**,

$$\left[\,d(e_3, F)\right]^2 = \langle\, e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3)\,\rangle$$

où $p_F(e_3)$ est le projeté orthogonal de e_3 sur F.

✍ *Lorsque l'expression de $e_3 - p_F(e_3)$ est un peu compliquée (comme ça va être le cas ici), cette formule pour le calcul de la distance est préférable à la formule évidente $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$. Il suffit de poser les deux calculs en parallèle pour s'en rendre compte !*

✍ *Si on connaissait un vecteur $n \in E$ orthogonal à F, on pourrait conclure rapidement en projetant orthogonalement sur la droite $F^\perp = \mathbb{R} \cdot n$. Mais un tel vecteur n'est pas donné et son calcul n'est ici pas particulièrement simple...*

❧ Pour calculer $p_F(e_3)$, nous allons passer par la caractérisation classique du projeté orthogonal **[47.4,5]**.

Le vecteur $p_F(e_3)$ est l'unique vecteur

$$y = ae_0 + be_1 + ce_2 \in F$$

tel que $(y - e_3) \in F^\perp$, c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle\, y - e_3 \,|\, e_k \,\rangle = 0$$

ou encore

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle\, y \,|\, e_k \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_k \,\rangle.$$

En tenant compte de $y = ae_0 + be_1 + ce_2$, on aboutit au système suivant.

$$\begin{cases} a\,\langle\, e_0 \,|\, e_0 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_0 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_0 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_0 \,\rangle \\ a\,\langle\, e_0 \,|\, e_1 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_1 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_1 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_1 \,\rangle \\ a\,\langle\, e_0 \,|\, e_2 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_2 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_2 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_2 \,\rangle \end{cases}$$

✍ *Si on connaissait une base orthogonale de F, on pourrait appliquer la formule bien connue*

$$p_F(e_3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle \varepsilon_k \,|\, e_3 \rangle}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$

Mais l'énoncé ne nous donne pas une telle base et il faudrait recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour en calculer une. Pourquoi pas ? Parce que ce serait sensiblement plus long !

❧ Pour une fois, le calcul de la matrice de Gram est sans douleur...

$$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \Gamma(i+j+1) = (i+j)!$$

En résolvant le système, on trouve $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \langle e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3) \rangle &= \langle e_3 \,|\, e_3 \rangle - a \langle e_3 \,|\, e_0 \rangle \\ &\qquad - b \langle e_3 \,|\, e_1 \rangle - c \langle e_3 \,|\, e_2 \rangle \\ &= 36. \end{aligned}$$

✍ *En développant $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$, on aurait une somme de $4^2 = 16$ termes (au lieu des 4 termes de l'expression qu'on vient de calculer)...*