❧ Par hypothèse, quels que soient les vecteurs x et y, quel que soit le réel t,

$$0 \leqslant \big\|u(x+ty)\big\| \leqslant \|x+ty\|.$$

En élevant au carré, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad q(t) \geqslant 0.$$

❧ Développons l'expression $q(t)$ au moyen de l'identité remarquable **[8.3]**, en utilisant la linéarité de u et la bilinéarité du produit scalaire :

$$q(t) = \left(\|x\|^2 + 2t\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle + t^2\|y\|^2\right) - \left(\big\|u(x)\big\|^2 + 2t\,\big\langle\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big\rangle + t^2\big\|u(y)\big\|^2\right).$$

En réordonnant les termes, on voit apparaître un polynôme de degré inférieur à 2, à coefficients réels :

$$q(t) = at^2 + 2bt + c$$

avec

$$a = \|y\|^2 - \big\|u(y)\big\|^2, \quad b = \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \big\langle\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big\rangle, \quad c = \|x\|^2 - \big\|u(x)\big\|^2.$$

► Si $a \neq 0$, il s'agit d'un polynôme de degré 2. Ce polynôme ne peut avoir deux racines réelles distinctes (sinon, il changerait de signe entre les racines), donc son *discriminant réduit* est négatif :

$$\delta = b^2 - ac \leqslant 0.$$

► Si $a = 0$, alors on a un polynôme de degré inférieur à 1 dont le signe est constant. Il faut donc que ce soit un polynôme constant et donc que $b = 0$. Dans ce cas particulier, on a donc $b^2 - ac = 0$.

Bref, dans tous les cas, on a

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \left[\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle - \big\langle\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big\rangle\,\right]^2 - \left[\|x\|^2 - \big\|u(x)\big\|^2\right]\left[\|y\|^2 - \big\|u(y)\big\|^2\right].$$

❧ Comme u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension FINIE (il s'agit d'un espace *euclidien*), le Théorème du rang nous assure que

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u - I) + \dim \mathrm{Im}(u - I).$$

Il reste donc à vérifier que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour en déduire que

$$E = \mathrm{Ker}(u - I) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - I).$$

REMARQUE.— L'argument de dimension nous permet de vérifier seulement l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(u - I) \subset \big(\mathrm{Im}(u - I)\big)^{\perp}$$

au lieu de vérifier l'égalité de ces deux sous-espaces (par *double* inclusion).

❧ Considérons donc deux vecteurs $x \in \mathrm{Ker}(u - I)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - I)$. On a donc d'une part

$$u(x) = x$$

et d'autre part, il existe un vecteur $y \in E$ tel que $z = u(y) - y$.

D'après ce qu'on a établi plus haut,

$$\left[\,\langle\, x \,|\, y \,\rangle - \big\langle\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big\rangle\,\right]^2 \leqslant 0$$

(puisque $u(x) - x = 0_E$) et donc

$$\big\langle\, u(x) \,\big|\, u(y) \,\big\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle.$$

Mais, une fois encore, $u(x) = x$, donc

$$\big\langle\, x \,\big|\, y - u(y) \,\big\rangle = 0$$

par linéarité à gauche du produit scalaire. On a bien démontré que $\langle\, x \,|\, z \,\rangle = 0$, ce qui prouve que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - I)$ et $\mathrm{Im}(u - I)$ sont orthogonaux et donc que

$$E = \mathrm{Ker}(u - I) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - I).$$