❧ D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n).$$

Nous allons procéder par récurrence.

❧ En particulier, pour $n = 0$, les droites $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_0$ et $\mathbb{R} \cdot u_0$ sont égales. Les vecteurs directeurs ε_0 et u_0 sont donc proportionnels. Comme ils sont tous les deux supposés *unitaires*, on a donc

$$u_0 = \pm\varepsilon_0.$$

❧ On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = \pm\varepsilon_k.$$

Comme $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n, u_{n+1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ et que la famille $(\varepsilon_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est *orthonormée*, on a

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_k + \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_{n+1}$$

(décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée).

Or, pour tout indice $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\varepsilon_k \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$$

et comme la famille $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est une famille orthogonale,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \varepsilon_k \perp u_{n+1}.$$

Par conséquent, il reste seulement

$$u_{n+1} = \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_{n+1}.$$

Comme les deux vecteurs u_{n+1} et ε_{n+1} sont *unitaires*, on en déduit que

$$\big|\, \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \,\big| = 1$$

(homogénéité de la norme), donc $u_{n+1} = \pm\varepsilon_{n+1}$.

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.