❧ Notons F, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Il est clair qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est nul à partir d'un certain rang est bien une famille de carré sommable et que l'ensemble F est bien un sous-espace vectoriel de l'espace $E = \ell^2(\mathbb{R})$ de suites réelles de carré sommable.

❧ En notant $e_i = (\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit une *base* de F : la famille

$$\mathscr{B}_0 = (e_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

inspirée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, est évidemment libre et toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ est une combinaison linéaire de la sous-famille finie $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n_0}$ (ce qui prouve que la famille $\mathscr{B}_0$ engendre F).

❧ Considérons maintenant un vecteur $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, orthogonal à F. En particulier, ce vecteur est orthogonal à tous les vecteurs $e_i \in \mathscr{B}_0$. Mais

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \qquad \langle\, u \,|\, e_i \,\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \delta_{i,k} = u_i$$

donc $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est le vecteur nul de E : l'orthogonal du sous-espace F est donc le sous-espace réduit au vecteur nul — alors que F est un sous-espace strict de E.

REMARQUE.— L'explication de cette bizarrerie est donnée par **[73]** : le sous-espace F est dense dans E.

En effet, pour tout vecteur $u \in E$, les suites

$$v_n = (u_0, \dots, u_n, 0, \dots) = (u_i \cdot \mathbb{1}_{[i\leqslant n]})_{i\in\mathbb{N}}$$

appartiennent à F pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\|u - v_n\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} (u_i - v_{n,i})^2 = \sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i^2.$$

En tant que reste d'une série convergente, $\|u - v_n\|^2$ tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que chaque vecteur $u \in E$ est limite d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F.