**[60.1]**

❧ On *sait bien* que **[34.1]**

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$$

et que le projeté orthogonal d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est la matrice

$$p(M) = \frac{M + M^T}{2}$$

si bien que

$$M - p(M) = \frac{M - M^T}{2}.$$

❧ Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$A - p(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle\, A \,|\, A - p(A) \,\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 9 & * & * \\ * & 5 & * \\ * & * & 8 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du **[44.2]**,

$$d\big(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\big) = \sqrt{11}.$$

REMARQUE.— Ne calculer que le strict nécessaire pour obtenir le produit scalaire, éviter les calculs superflus !

**[60.2]**

❧ On considère ici d'une part la droite $D = \mathbb{R} \cdot I_3$ et d'autre part le plan $H$ d'équation $\operatorname{tr}(M) = 0$ (c'est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle, donc un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$).

Comme $\operatorname{tr}(I_3) = 3 \neq 0$, on en déduit que la droite $D$ et le plan $H$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, quelles que soient les matrices $A = \lambda I_3 \in D$ et $M \in H$, on a $\operatorname{tr}(M) = 0$ et par conséquent

$$\langle\, A \,|\, M \,\rangle = \operatorname{tr}[(\lambda I_3)^T M] = \lambda \operatorname{tr}(M) = 0.$$

Les deux sous-espaces $H$ et $D$ sont donc orthogonaux et

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = H \overset{\perp}{\oplus} D.$$

❧ Puisque $H$ et $D$ sont orthogonaux, le projeté orthogonal de $I_3 \in D$ sur $H$ est la matrice nulle :

$$I_3 = \underbrace{O_3}_{\in H} + \underbrace{I_3}_{\in D}.$$

Par conséquent,

$$d(I_3, H) = \|I_3 - p(I_3)\| = \|I_3\| = \sqrt{\operatorname{tr}(I_3^T . I_3)} = \sqrt{3}.$$