20
Calcul différentiel

1. Le point de vue affine
On considère ici des fonctions définies sur un espace vectoriel normé E de dimension finie (ou sur une partie de E), à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie lui aussi.
Une fonction $f : E \to F$ est dite **numérique** lorsque son espace d'arrivée F est égal à $\mathbb{R}$.
Nous utiliserons la structure affine de ces deux espaces vectoriels, c'est-à-dire que leurs éléments seront considérés comme des **points**. Les vecteurs, qui servent alors à passer d'un point à un autre par une translation, seront notés en lettres grasses.

Éléments de topologie

2. La **topologie** est une partie de la géométrie qui néglige les formes (cercles, triangles, carrés…) et considère seulement les relations de position : la notion centrale de **voisinage** sert à définir la convergence des suites et la continuité des fonctions.
La topologie d'un espace vectoriel de dimension finie E est définie par une norme.
2.1 On dit que la famille $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est une **suite convergente** lorsqu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\ell} \in E$, dit **limite**, tel que la suite réelle $(\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{\ell}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0.
2.2 Voisinage d'un point
Une partie V de E est un **voisinage** du point M_0 si, et seulement si, elle contient tous les points de la forme

$$M = M_0 + \boldsymbol{h}$$

où la norme du vecteur $\boldsymbol{h}$ est assez proche de 0, c'est-à-dire

$$\exists\, r > 0,\ \forall\, \|\boldsymbol{h}\| \leqslant r, \quad M_0 + \boldsymbol{h} \in V.$$

2.3 La fonction f est **continue** en M_0 lorsque l'expression réelle $\|f(M_0+\boldsymbol{h}) - f(M_0)\|$ tend vers 0 lorsque le réel $\|\boldsymbol{h}\|$ tend vers 0.
3. Ouvert
Une partie U de E est un **ouvert** si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points : pour tout point $M_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \quad \|\boldsymbol{h}\| \leqslant r \implies (M_0 + \boldsymbol{h}) \in U.$$

Lorsqu'une fonction f est définie sur un ouvert, on peut étudier localement cette fonction autour de chaque point de son ensemble de définition.
4. Équivalence des normes
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : si une propriété topologique (la convergence d'une suite, la continuité d'une fonction, le fait qu'une partie soit ouverte…) est établie pour une norme particulière, alors elle est vraie pour *toutes* les normes.
4.1 Dans $\mathbb{R}^2$, la distance euclidienne de

$$M = (x_0 + h_x, y_0 + h_y) \quad \text{à} \quad M_0 = (x_0, y_0)$$

est égale à

$$r = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue au point M_0 si, et seulement si, $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ lorsque r tend vers 0.
4.2 La **norme produit** du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ est définie par

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant p} |x_k|.$$

1. La partie $U \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert si, et seulement si, pour chaque point

$$M_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p) \in U,$$

il existe $\alpha > 0$ tel que

$$[x_0^1 - \alpha, x_0^1 + \alpha] \times \cdots \times [x_0^p - \alpha, x_0^p + \alpha] \subset U.$$

2. Une suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ converge vers le vecteur $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^p$ si, et seulement si, il y a convergence coordonnée par coordonnée :

$$\boldsymbol{u}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boldsymbol{\ell} \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^k.$$

3. Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

$$f = \big[x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)\big]$$

est continue au point x_0 si, et seulement si, chacune de ses composantes est continue au point x_0 :

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0) \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad f_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f_k(x_0).$$

5. Ordres de grandeur au voisinage de M_0
Pour tout $\alpha > 0$, on note

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha) \quad \text{ou} \quad f(M_0 + \boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha)$$

pour signifier respectivement que le rapport

$$\frac{\big\|f(M_0 + \boldsymbol{h})\big\|_F}{\|\boldsymbol{h}\|_E^\alpha}$$

tend vers 0 ou reste borné lorsque le vecteur déplacement $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}_E$.
Pour $\alpha = 1$, on allège les notations en écrivant $o(\boldsymbol{h})$ et $\mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ au lieu de $o(\|\boldsymbol{h}\|)$ et $\mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|)$ respectivement.
6. Applications linéaires
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire définie sur E est continue, quelle que soit la norme sur E, quel que soit l'espace vectoriel d'arrivée F.
6.1 Toute application linéaire $\varphi \in L(E, F)$ est continue sur E et en particulier bornée sur la sphère unité de E. De plus, en posant

$$|||\varphi||| = \sup_{\|\boldsymbol{u}\|_E = 1} \big\|\varphi(\boldsymbol{u})\big\|_F,$$

on obtient l'estimation suivante :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_F \leqslant |||\varphi|||\, \|\boldsymbol{x}\|_E$$

qui traduit la propriété de Lipschitz pour φ. En particulier,

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}) \quad \text{et} \quad \varphi\big(o(\boldsymbol{h})\big) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}_E$.
6.2 Si $\varphi(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $\mathbf{0}_E$, alors φ est l'application nulle.
7. Applications bilinéaires
Soit $\psi : E_1 \times E_2 \to F$, une application bilinéaire, où E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie.
7.1 Quel que soit $x_2 \in E_2$, l'application

$$\Phi(x_2) = [x_1 \mapsto \psi(x_1, x_2)]$$

est une application linéaire de E_1 dans F et l'application Φ est linéaire de E_2 dans $L(E_1, F)$.
7.2 L'application ψ est continue sur $E_1 \times E_2$ et il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x_1 \in E_1, \forall\, x_2 \in E_2, \quad \big\|\psi(x_1, x_2)\big\| \leqslant K\|x_1\|\,\|x_2\|.$$

I

Fonctions différentiables

8. Contrairement à $\mathbb{R}$, un espace vectoriel E de dimension supérieure à 2 n'est pas naturellement ordonné. Par conséquent, l'étude des *variations* d'une fonction f définie sur E n'a pas de sens.
On se borne donc dans un premier temps à comparer localement une telle fonction f aux fonctions les plus simples qui soient, c'est-à-dire aux fonctions affines. Les fonctions dites **différentiables** sont les fonctions pour lesquelles cette comparaison est possible.

I.1 Application linéaire tangente

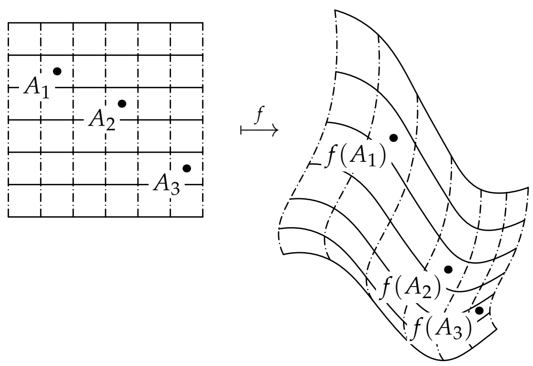
9. Différentiabilité en un point
9.1 Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et si $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors il existe une application linéaire $\varphi : \mathbb{R} \to E$ telle que $f(t_0 + h) = f(t_0) + \varphi(h) + o(h)$ lorsque h tend vers 0.
9.2 ✍ *La fonction $f : U \to F$ est **différentiable en** $M_0 \in U$ lorsqu'il existe $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que*

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}$.
9.3 Il existe au plus une application linéaire $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que $f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$.
9.4 ✍ *Si f est différentiable au point $M_0 \in U$, l'unique application $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que $f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$ pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$ est appelée **différentielle de f en** M_0, ou **application linéaire tangente** à f en M_0, et notée $\mathrm{d}f(M_0)$.*
9.5 ➙ *Si l'application f est différentiable en M_0, alors elle admet un **développement limité à l'ordre** 1 :*

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$$

pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$.
10. L'image d'une droite par une application affine est elle aussi une droite. Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui n'est pas affine transforme en général une droite en une courbe.



10.1 Étant donnés deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on peut définir deux points B et C en posant

$$B = A + \boldsymbol{u} \quad \text{et} \quad C = A + \boldsymbol{v}.$$

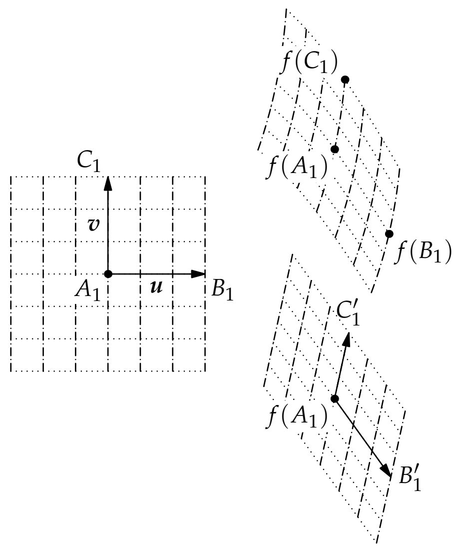
Le développement limité [**9.5**] de f nous assure alors que

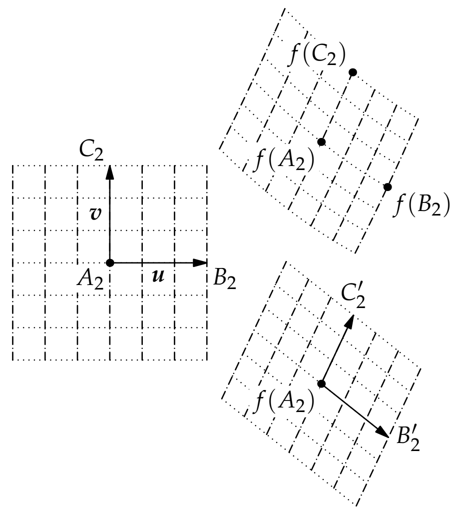
$$B' = f(A) + \mathrm{d}f(A)(\boldsymbol{u}) \approx f(B)$$

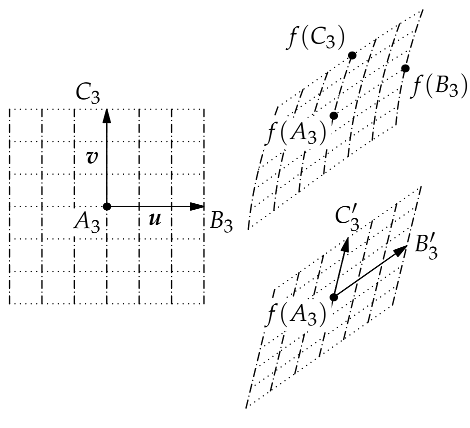
et que

$$C' = f(A) + \mathrm{d}f(A)(\boldsymbol{v}) \approx f(C)$$

pourvu que les normes de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ soient assez petites pour que les points B et C soient assez proches de A.







10.2 On voit sur ces figures que la déformation d'un petit voisinage de A par une application différentiable f est assez proche de la déformation de ce voisinage par l'application linéaire $\mathrm{d}f(A)$, conformément à [**9.5**].
10.3 On voit aussi que l'image de la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ par les différentes applications linéaires tangentes n'est pas toujours la même : en général, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(A)$ varie en fonction du point A. →[**15**]

11. Exemples
11.1 Si U est un intervalle ouvert de $E = \mathbb{R}$, alors la fonction f est différentiable en $M_0 \in U$ si, et seulement si, elle est dérivable en M_0 et

$$f'(M_0) = \mathrm{d}f(M_0)(1).$$

11.2 L'application $f = \left[M \mapsto \operatorname{tr}(M^2)\right]$ est différentiable en tout point $M_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall\, H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}f(M_0)(H) = 2\operatorname{tr}(M_0 H).$$

12. Différentiabilité et continuité

12.1 Si f est différentiable en M_0, alors

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) - f(M_0) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

12.2 ➙ *Si f est différentiable en M_0, alors f est continue en M_0.*

I.2 Différentielle

13. Différentiabilité globale

13.1 ✍ *La fonction $f : U \to F$ est **différentiable (sur U)** lorsqu'elle est différentiable en tout point $M_0 \in U$.*

13.2 ✍ *Si $f : U \to F$ est différentiable, la **différentielle** de f est la fonction*

$$\mathrm{d}f : U \to \mathrm{L}(E, F)$$

qui, à tout point M_0 de l'ouvert U, associe l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0) : E \to F$.

Exemples fondamentaux

14. ➙ *Si $f : U \to F$ est constante, alors f est différentiable sur U et en tout point de U, l'application linéaire tangente à f est l'application nulle :*

$$\forall\, M_0 \in U, \quad \mathrm{d}f(M_0) = \omega = [\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{0}_F]\,.$$

15. ➙ *Toute application linéaire $f \in \mathrm{L}(E, F)$ est différentiable sur E et en tout point de E, l'application linéaire tangente à f est égale à f :*

$$\forall\, M_0 \in E, \quad \mathrm{d}f(M_0) = f.$$

16. ➙ *Une application bilinéaire $f : V_1 \times V_2 \to F$ est différentiable sur $E = V_1 \times V_2$ et*

$$\mathrm{d}f(M_0) = \left[(\boldsymbol{h}^1, \boldsymbol{h}^2) \mapsto f(\boldsymbol{h}^1, M_0^2) + f(M_0^1, \boldsymbol{h}^2)\right]$$

pour tout $M_0 = (M_0^1, M_0^2) \in E$.

Opérations sur les fonctions différentiables

17. ➙ *Une combinaison linéaire de fonctions différentiables en M_0 est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)(M_0) = \lambda\, \mathrm{d}(f)(M_0) + \mathrm{d}g(M_0).$$

18. ➙ *Si f est différentiable en M_0 et si $g : F \to G$ est linéaire, alors $g \circ f$ est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = g \circ \left[\mathrm{d}f(M_0)\right].$$

19. ➙ *Une fonction à valeurs dans un espace produit*

$$f = \left[M \mapsto \big(f_1(M), \dots, f_n(M)\big)\right] : U \to F = F_1 \times \cdots \times F_n$$

est différentiable en M_0 si, et seulement si, toutes ses composantes f_k sont différentiables en M_0 et

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big(\mathrm{d}f_1(M_0)(\boldsymbol{h}), \dots, \mathrm{d}f_n(M_0)(\boldsymbol{h})\big).$$

20. ➙ *Si $f : U \to F$ est différentiable en $M_0 \in U$, si $g : V \to G$ est différentiable en $P_0 = f(M_0) \in V$ et si $f_*(U) \subset V$, alors $(g \circ f)$ est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = \mathrm{d}g(P_0) \circ \mathrm{d}f(M_0).$$

21. ➙ *Si f et g sont deux applications différentiables en $M_0 \in U$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors le produit fg est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(fg)(M_0) = g(M_0) \cdot \mathrm{d}f(M_0) + f(M_0) \cdot \mathrm{d}g(M_0).$$

I.3 Dérivée selon un vecteur

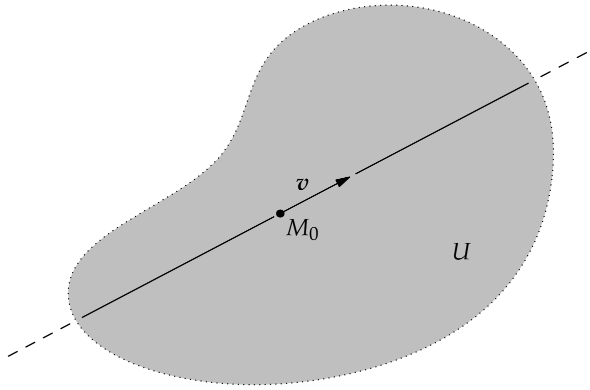
22. Pour étudier une fonction de plusieurs variables au voisinage d'un point M_0, il peut être utile de se ramener à l'étude de fonctions d'une seule variable réelle au voisinage de 0.

22.1 Soit $M_0 \in U$. Pour tout $\boldsymbol{v} \in E$, l'application

$$\varphi_{\boldsymbol{v}} = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v})]$$

est définie sur un voisinage de 0 et si f est différentiable en M_0, alors

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v}) = f(M_0) + t \cdot \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{v}) + o(t).$$



22.2 ✍ *L'application f admet une **dérivée selon le vecteur $\boldsymbol{v} \in E$** au point $M_0 \in U$ lorsque l'application*

$$\varphi_{\boldsymbol{v}} = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v})]$$

est dérivable en $t = 0$. On note alors

$$D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = (\varphi_{\boldsymbol{v}})'(0)$$

la dérivée de f selon $\boldsymbol{v}$ au point M_0.

22.3 Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_E$, alors $D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = \boldsymbol{0}_F$.

22.4

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_{\alpha \cdot \boldsymbol{v}} f(M_0) = \alpha \cdot D_{\boldsymbol{v}} f(M_0).$$

22.5 ➙ *Si f est différentiable en M_0, alors f admet une dérivée au point M_0 selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ et*

$$D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{v}).$$

23. Exemples

23.1 La fonction définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{xy^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

admet une dérivée en $M_0 = (0, 0)$ selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

23.2 La fonction définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

admet une dérivée en $M_0 = (0, 0)$ selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

23.3 L'application définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

admet une dérivée en M_0 selon les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ de la base canonique.

I.4 Dérivées partielles

24. ✍ *Soit $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$, une base de E.*
*Si, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, une fonction $f : U \to F$ admet une dérivée selon $\boldsymbol{e}_j$ au point M_0, on dit qu'elle admet des **dérivées partielles de f relatives à la base $\mathscr{B}$**.*
Les dérivées partielles de f sont notées $\partial_1 f$, …, $\partial_p f$ et définies par

$$\partial_j f(M_0) = D_{\boldsymbol{e}_j} f(M_0).$$

25. Caractérisation des fonctions différentiables
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, une base de E. On notera

$$\boldsymbol{h} = h_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \cdots + h_p \cdot \boldsymbol{e}_p,$$

la décomposition de tout vecteur $\boldsymbol{h} \in E$ dans cette base.
25.1 Si f est différentiable au point M_0, alors elle admet des dérivées partielles relatives à la base $\mathscr{B}$ au point M_0 et

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = D_{\boldsymbol{h}} f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \partial_j f(M_0).$$

Par suite, pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}_E$,

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \partial_j f(M_0) + o(\boldsymbol{h}).$$

25.2 Si les dérivées partielles de f sont définies au point M_0 et si

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) - f(M_0) - \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(M_0) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$, alors f est différentiable en M_0.
26. Exemples
26.1 *Suite de* **[23.1]** – La fonction f est différentiable au point M_0 et l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est l'application nulle.
26.2 *Suite de* **[23.2]** – La fonction f n'est pas différentiable au point $(0, 0)$.
26.3 *Suite de* **[23.3]** – L'application f n'est pas différentiable en $M_0 = (0, 0)$. Elle est différentiable en $M_1 = (1, 0)$ avec

$$f(M_1 + \boldsymbol{h}) = (\, \boldsymbol{e}_2 \mid \boldsymbol{h} \,) + o(\boldsymbol{h})$$

pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$.
26.4 L'application $[\boldsymbol{u} \mapsto \|\boldsymbol{u}\|_\infty]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas différentiable en $M_0 = (0, 0)$.
27. Dérivées partielles secondes
Les **dérivées partielles secondes** sont les dérivées partielles des dérivées partielles (si elles existent). On utilise la notation habituelle pour la composition des applications. Ainsi, $\partial_i \partial_j f$ désigne la i-ème dérivée partielle de la dérivée partielle $\partial_j f$.

Matrice jacobienne

28. Soit $f : U \to F$, une fonction différentiable. On choisit deux bases $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ des espaces E et F respectivement.
28.1 ✍ *La **matrice jacobienne (relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$)** au point $M_0 \in U$ de l'application différentiable $f : U \to F$ est définie par*

$$\mathrm{Jac}(f)(M_0) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\big(\mathrm{d}f(M_0)\big).$$

28.2 Lecture en colonnes
La j-ème colonne de $\mathrm{Jac}(f)(M_0)$ est la matrice relative à la base $\mathscr{C}$ de la j-ème dérivée partielle $\partial_j f(M_0) \in F$ relative à $\mathscr{B}$.
28.3 Lecture en lignes
Les **composantes** de f relatives à la base $\mathscr{C}$ sont les applications f^1, …, f^n de U dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, M \in U, \quad f(M) = \sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i.$$

Comme $f : U \to F$ est différentiable, alors $f^i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(f^i)(M_0) \in \mathrm{L}(E, \mathbb{R}).$$

La i-ème ligne de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de la i-ème composante de f relative à la base $\mathscr{C}$.
29. ✍ *Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, le **jacobien** de f en M_0 est le déterminant de l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$.*

Gradient

30. Points critiques
L'application linéaire tangente à $f : U \to \mathbb{R}$ en un point quelconque M_0 de U est une forme linéaire sur E.
30.1 ✍ *Le point $M_0 \in U$ est un **point critique** de f lorsque la forme linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est identiquement nulle.*
30.2 ➙ *Soient U, un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable.*
Le point $M_0 \in U$ est un point critique de f si, et seulement si, quelle que soit la base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ de E, les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}$ sont nulles au point M_0 :

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \partial_j f(M_0) = 0.$$

31. On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application différentiable et que l'espace E est un espace euclidien.
31.1 Pour tout point $M_0 \in U$, il existe un, et un seul, vecteur $\boldsymbol{a} \in E$ tel que

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \quad \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = (\, \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{h} \,).$$

31.2 ✍ *Le **gradient** de f au point M_0 est le vecteur, noté $\nabla f(M_0)$ ou $\mathrm{grad}\, f(M_0)$, de E défini par*

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \quad \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big(\, \nabla f(M_0) \,\big|\, \boldsymbol{h} \,\big).$$

31.3 ➙ *Le point $M_0 \in U$ est un point critique de f si, et seulement si, le gradient de f au point M_0 est nul : $\nabla f(M_0) = \mathbf{0}_E$.*
31.4 ➙ *Si la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors les coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ du gradient $\nabla f(M_0)$ sont les dérivées partielles de f relatives à cette base :*

$$\partial_1 f(M_0), \; \ldots, \; \partial_p f(M_0).$$

I.5 Notation de Leibniz

32. Soit $f : U \to F$.
32.1 Ayant choisi une base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ de E, on identifie souvent un point $M \in U$ à ses coordonnées relatives à $\mathscr{B}$.

$$\sum_{j=1}^{p} x_j \cdot \boldsymbol{e}_j \quad \longleftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$$

32.2 De même, ayant choisi une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F, on identifie la fonction $f : U \to F$ à une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i \quad \longleftrightarrow \quad \big(f^1(M), \ldots, f^n(M)\big)$$

32.3 Les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant fixées, on identifie donc l'application f à la famille $(f^1, \ldots, f^n)$ de ses composantes vues comme des fonctions de plusieurs variables

$$f^i(x_1, \ldots, x_p)$$

définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
32.4 On utilise alors la **notation de Leibniz** pour écrire les dérivées partielles de f :

$$\partial_j(f^i)(M) = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(M).$$

Avec cette notation, la dérivée de f en M_0 selon le vecteur $\boldsymbol{h}$ s'écrit →**[25.1]**

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = D_{\boldsymbol{h}}f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0).$$

33. On considère ici une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
33.1 Si un point de $\mathbb{R}^3$ est représenté par (x, y, z), alors les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ et $\partial_3 f$ sont en pratique notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ou} \quad f'_x,\ f'_y \text{ et } f'_z \quad \text{voire} \quad f_x,\ f_y \text{ et } f_z$$

s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté.
33.2 Les dérivées partielles secondes $\partial_1\partial_1 f$, $\partial_2\partial_1 f$... sont notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \dots \quad \text{ou} \quad f''_{x^2},\ f''_{xy} \dots \quad \text{voire} \quad f_{x^2},\ f_{xy} \dots$$

Entraînement

34. Questions pour réfléchir
1. Pourquoi ne peut-on étendre les notions de **taux d'accroissement** et de **sens de variation** aux fonctions de plusieurs variables ?
2. Si la fonction f est définie sur un ouvert U de l'espace affine E, alors son application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est définie sur l'espace vectoriel E tout entier.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $f_k = [M \mapsto M^k]$ est différentiable en tout point $M_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Si la fonction $f : U \to F$ est différentiable, alors elle est continue.
5. Comment est-il utile de généraliser la notion de **fonction différentiable** en dimension infinie ?
6. Si $f : I \to E$ est dérivable sur I, alors f est différentiable sur I et sa différentielle est l'application

$$\big[t_0 \mapsto [x \mapsto x \cdot f'(t_0)]\big].$$

7. *Suite de* **[14]** – Quelle est la différentielle d'une fonction constante ?
8. Si l'application $f : E \to F$ est linéaire, alors sa différentielle $\mathrm{d}f : E \to \mathrm{L}(E, F)$ est constante.
9. Soit $f : U \to F$, une fonction différentiable.
9.a L'application $\mathrm{d}f(M_0)$ peut-elle être constante ?
9.b L'application $\mathrm{d}f$ peut-elle être égale à f ? peut-elle être linéaire ?
10. Une application n-linéaire $f : V^n \to F$ est différentiable. Étudier le cas de $\det_{\mathscr{B}} : V^n \to \mathbb{R}$.
11. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Quels que soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{h} \in E$,

$$\big|\,\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h})\big| \leqslant \|\nabla f(M_0)\|\,\|\boldsymbol{h}\|.$$

12. Exprimer les coordonnées de $\nabla f(M_0)$ dans une base quelconque de E.

35. Soit $f : E \to F$, une application différentiable telle que

$$\forall\,(\lambda, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times E, \quad f(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda \cdot f(\boldsymbol{x}).$$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$f(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \mathrm{d}f(\boldsymbol{0}_E)(\boldsymbol{x}) + o(\lambda)$$

lorsque le réel λ tend vers 0.

36. Calculer les dérivées partielles et les dérivées partielles secondes des expressions suivantes.

$$x^2y^2(x^2 - y^4) \qquad x\cos y - ye^x \qquad \ell\mathrm{n}(x^2 - y)$$
$$x^2 - 3xy + y - 1 \qquad y \sin xy \qquad x\sin(y - 3z)$$

37. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
37.1 On pose $g(x, y) = f(y, x)$. Relier les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(y,x) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$$

aux dérivées partielles de f.
37.2 Comparer les dérivées partielles f_x et f_y
1. lorsque f est symétrique :

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

2. lorsque f est antisymétrique :

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = -f(y,x).$$

38. Différentiabilité d'une application affine
S'il existe une application linéaire $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que

$$\forall\,\boldsymbol{h} \in E, \quad f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}),$$

alors f est différentiable sur E et $\mathrm{d}f(M_0) = \varphi$ pour tout $M_0 \in E$.

39. Soit $f = \det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Les applications

$$\varphi_{i,j} = \Big[t \mapsto f(M_0 + tE_{i,j})\Big]$$

sont affines et la matrice

$$\big(D_{E_{i,j}}f(M_0)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

des dérivées partielles de f est égale à la comatrice de M_0.

II
Éléments de géométrie différentielle

II.1 Arcs paramétrés

40. Soit E, un espace vectoriel de dimension finie.
40.1 ✍ *Un **arc paramétré** est un couple (I, γ), où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et γ, une fonction de I dans E.*
*Les réels $t \in I$ sont appelés **paramètres**.*
40.2 L'image d'un arc paramétré

$$\Gamma = \big\{\gamma(t),\ t \in I\big\}$$

est une partie de E considérée comme une **courbe**. Une courbe qui est contenue dans un plan est dite **courbe plane**. Une courbe qui n'est pas plane est dite **courbe gauche**.

41. Soit (I, f), un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$: la fonction f est continûment dérivable sur I.
41.1 Pour tout $t_0 \in I$,

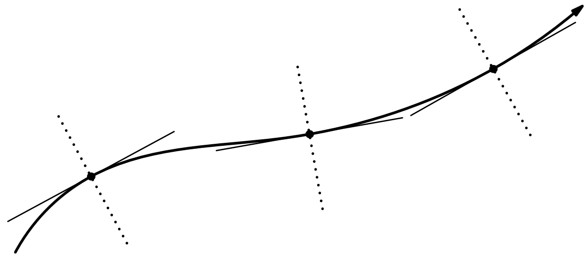
$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h)$$

lorsque h tend vers 0.
41.2 ✍ *Le réel $t_0 \in I$ est un **paramètre régulier** lorsque le vecteur $f'(t_0) \in E$ n'est pas nul.*
41.3 Si t_0 est un paramètre régulier, la fonction f est proche d'une fonction affine au voisinage de t_0 et son image Γ est donc proche de la droite paramétrée par

$$\big[h \mapsto f(t_0) + h \cdot f'(t_0)\big]$$

au voisinage du point $M_0 = f(t_0)$.

41.4 ✍ *Si $t_0 \in I$ est un paramètre régulier de l'arc paramétré (I, f), la* ***tangente*** *à la courbe Γ au point $M_0 = f(t_0)$ est la droite issue du point M_0 et dirigée par le vecteur $f'(t_0) \in E$.*

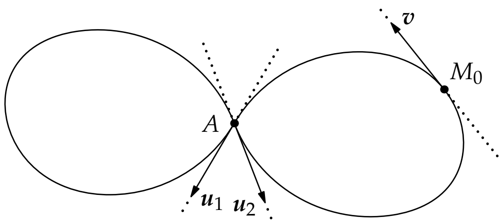


41.5 ✍ *Si $t_0 \in I$ est un paramètre régulier d'un arc paramétré plan, la* ***normale*** *à Γ au point M_0 est la perpendiculaire issue de M_0 à la tangente à Γ au point M_0.*

42. Interprétation cinématique
Un arc paramétré (I, f) est compris comme le mouvement d'un point matériel au cours du temps.
42.1 La courbe Γ est alors la **trajectoire** de ce point et le vecteur $f'(t_0)$ est le **vecteur vitesse** à l'instant t_0.
42.2 Si $t_0 \in I$ n'est pas un paramètre régulier, on dit alors que $f(t_0)$ est un **point stationnaire**. En un point stationnaire, la courbe Γ n'a pas nécessairement de tangente. →[43.4]
42.3 S'il existe deux paramètres t_1 et t_2 tels que

$$A = f(t_1) = f(t_2),$$

la courbe Γ peut avoir deux tangentes distinctes au point A.



43. Dérivée le long d'un arc
Soit $f : U \to F$, une fonction différentiable sur l'ouvert U et $\gamma : I \to U$, une fonction dérivable sur l'intervalle I, à valeurs dans U.
L'étude de la composée $g = f \circ \gamma$ décrit le comportement de la fonction f le long de la courbe paramétrée par γ.
43.1 Soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{h} \in E$: comme U est ouvert, il existe un intervalle $I =]-\alpha, \alpha[$ tel que

$$\forall\, t \in I, \quad \gamma(t) = M_0 + t \cdot \boldsymbol{h} \in U$$

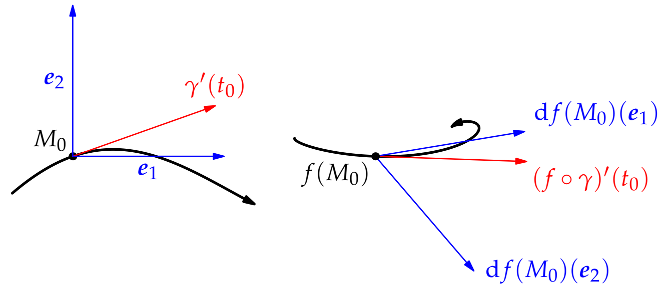
et $(f \circ \gamma)'(0)$ est la dérivée de f en M_0 selon le vecteur $\boldsymbol{h}$. →[22]
43.2 ➙ *La composée $f \circ \gamma : I \to F$ est dérivable et*

$$\forall\, t_0 \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = \big[\mathrm{d}f\big(\gamma(t_0)\big)\big]\big(\gamma'(t_0)\big).$$

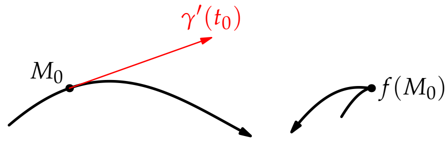
43.3 Si le vecteur $\gamma'(t_0) \in E$ n'est pas nul, alors il dirige la tangente au point $M_0 = \gamma(t_0)$ à la courbe paramétrée par γ.
Si de plus il n'appartient pas au noyau de l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$, alors son image

$$\mathrm{d}f(M_0)\big(\gamma'(t_0)\big) \in F$$

dirige la tangente au point $N_0 = f(M_0)$ à la courbe paramétrée par $f \circ \gamma$.



43.4 Si $\gamma'(t_0)$ appartient au noyau de $\mathrm{d}f(M_0)$, il se peut que la courbe paramétrée par $f \circ \gamma$ n'ait pas de tangente au point N_0.



II.2 Vecteurs tangents

44. ✍ *Soit X, une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. Un vecteur $v \in E$ est* ***tangent à*** *X* ***au point*** *$M_0 \in X$ lorsqu'il existe un arc paramétré γ défini sur un voisinage I de 0 tel que*

$$\forall\, t \in I, \quad \gamma(t) \in X, \quad \gamma(0) = M_0 \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

45. Si le vecteur v est tangent à X au point M_0, alors λv est tangent à X au point M_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
46. Soit f, une fonction différentiable, définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Le **graphe** de f est une partie de $E = \mathbb{R}^3$.

$$\Sigma = \big\{\big(x, y, f(x,y)\big),\ (x,y) \in \Omega\big\}$$

46.1 Le vecteur $v = (v_x, v_y, v_z) \in E$ est tangent à Σ au point M_0 de coordonnées $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ si, et seulement si,

$$v_z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, v_y.$$

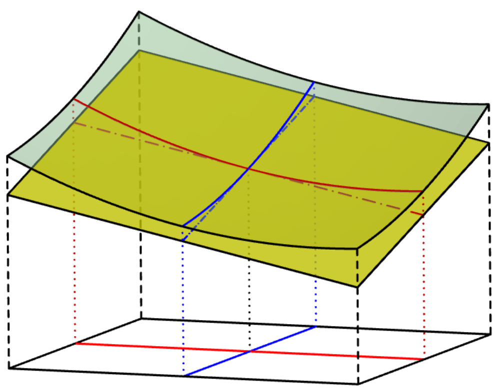
46.2 ✍ *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors le* ***plan tangent à la surface*** *$\Sigma = [z = f(x,y)]$ au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ est le plan affine d'équation*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

46.3 Le plan tangent à $\Sigma = [z = f(x,y)]$ au point M_0 est le plan qui passe par M_0 et qui est normal au gradient de

$$F = \big[(x, y, z) \mapsto f(x,y) - z\big].$$

La normale à Σ au point M_0 est la droite issue de M_0 et dirigée par le gradient $\nabla F(M_0)$.



II.3 Lignes de niveau

47. ✍ *Soient Ω, un ouvert de l'espace euclidien E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, une application différentiable.*
*Les **lignes de niveau** de f sont les parties de E définies par*

$$[f(M) = \lambda]$$

lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$.

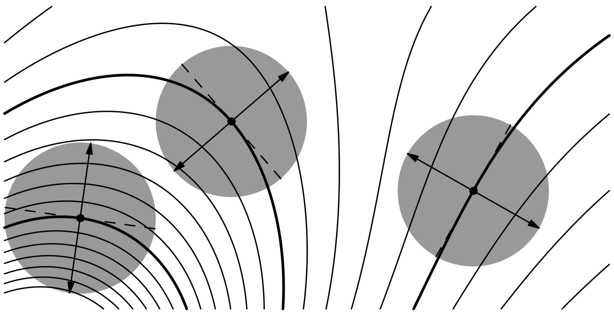
48. Ligne de plus grande pente
Soient $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable et $M_0 \in U$.

48.1 Pour tout $\boldsymbol{h} \in E$,

$$\big(\nabla f(M_0) \,\big|\, \boldsymbol{h}\big) = D_{\boldsymbol{h}} f(M_0).$$

48.2 ➙ *Si $\boldsymbol{h}$ est unitaire, la dérivée de f en M_0 selon $\boldsymbol{h}$ est maximale si, et seulement si, $\boldsymbol{h}$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.*

48.3 Dans la direction du gradient, les lignes de niveau de la fonction f sont très serrées, donc f varie rapidement.



48.4 D'après [**9.5**], si le déplacement $\boldsymbol{h}$ est assez petit et orthogonal au gradient $\nabla f(M_0)$, alors la dérivée de f selon $\boldsymbol{h}$ est nulle :

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \big(\nabla f(M_0) \,\big|\, \boldsymbol{h}\big) + o(\boldsymbol{h}) = f(M_0) + o(\boldsymbol{h}).$$

Par conséquent, dans une direction orthogonale au gradient, la fonction f varie très lentement.

48.5 ➙ *Soient $X = [f(x) = \lambda_0]$, une ligne de niveau de f et x_0, un point de X tel que $\nabla f(x_0) \neq \mathbf{0}$. Alors les vecteurs tangents à la ligne de niveau X au point x_0 sont orthogonaux au gradient $\nabla f(x_0)$.*

Entraînement

49. *Suite de* [**46.2**] –

1. Le plan tangent à Σ est horizontal si, et seulement si, le gradient de f est nul.
2. Ce plan tangent peut-il être vertical ?

50. Une courbe plane Γ est représentée d'une part comme une ligne de niveau d'une fonction différentiable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et d'autre part comme l'image d'un arc paramétré (I, γ) où γ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^2$.

$$\Gamma = \big[F(x,y) = 0\big] = \big\{\gamma(t),\ t \in I\big\}.$$

On suppose que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ et que $F(x_0, y_0) = 0$. Comparer $\gamma'(t_0)$ et les dérivées partielles $F_x(x_0, y_0)$ et $F_y(x_0, y_0)$.

51. Calculs de tangentes
Pour calculer la tangente au point $M_0 = f(t_0)$, il est parfois plus efficace de calculer le développement limité à l'ordre 1 des composantes de f que de dériver chacune de ces composantes.

51.1 Calculer la tangente à l'arc paramétré par

$$f(t) = \Big(\frac{t}{1-t^2}, \frac{t^2}{1-t^2}\Big)$$

au point $f(0)$.

51.2 L'arc paramétré par

$$\forall\, t \in \,]-\pi, \pi[, \quad f(t) = (\tan {}^{t}\!/_{2} + \cos t,\ 1 - \sin t)$$

admet $f({}^{\pi}\!/_{2})$ pour point stationnaire. Calculer la tangente au point $f(0)$.

51.3 Calculer la tangente à l'**astroïde** paramétrée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

au point $M_0 = f({}^{\pi}\!/_{4})$.

51.4 Calculer les tangentes au **folium**, paramétré par

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(t) = \Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

aux points $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(1)$.

51.5 Calculer les tangentes à la **lemniscate**, paramétrée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \Big(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\Big)$$

aux points $M_{-1} = f(-1)$, $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(1)$.

51.6 Calculer les tangentes à la **strophoïde**, paramétrée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \Big(\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\Big)$$

aux points $M_{-1} = f(-1)$, $M_0 = f(0)$ et $M_1 = f(-1)$.

51.7 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \Big(\frac{t^3}{1-t^2}, \frac{t-2}{1-t^2}\Big)$$

est un arc régulier. Calculer sa tangente au point $M_0 = f(0)$.

52. Exemples de points stationnaires

52.1 L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \Big(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\Big)$$

admet un point stationnaire pour $t = 1$.

52.2 La **cissoïde de Dioclès**, paramétrée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \Big(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\Big)$$

admet $O = f(0)$ pour seul point stationnaire.

52.3 La **tractrice**, paramétrée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \Big(t - \operatorname{th} t, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\Big)$$

admet $M_0 = f(0)$ pour seul point stationnaire.

52.4 La **cycloïde**, paramétrée par

$$\forall\, t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$$

admet $M_0 = f(0)$ et $M_{2\pi} = f(2\pi)$ pour seuls points stationnaires.

52.5 La **néphroïde** paramétrée par

$$\forall\, t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = (3\sin t - \sin 3t,\ 3\cos t - \cos 3t)$$

admet $M_{-\pi} = f(-\pi)$, $M_0 = f(0)$ et $M_\pi = f(\pi)$ pour seuls points stationnaires.

53. Plan tangent à une quadrique

53.1 Le plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au graphe de

$$f = \Big[(x,y) \mapsto -17x^2 + 14xy - y^2 + 8x + 8y + 16\Big]$$

est horizontal si, et seulement si, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, -3, 0)$.
La fonction f prend des valeurs supérieures à $f(x_0, y_0)$ et des valeurs inférieures à $f(x_0, y_0)$: elle n'a ni minimum, ni maximum.

53.2 Le plan tangent en M_0 au graphe de la fonction

$$f = \Big[(x,y) \mapsto 13x^2 - 14xy + 5y^2 + 14x - 10y + 5\Big]$$

est horizontal si, et seulement si, $M_0 = (0, 1, 0)$. Quels que soient les réels h_x et h_y,

$$f(h_x, 1 + h_y) = \begin{pmatrix} h_x & h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \geqslant f(0,1)$$

donc $f(0,1)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

53.3 Le plan tangent en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au graphe de

$$f = \Big[(x,y) \mapsto 9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 5\Big]$$

est horizontal si, et seulement si, $y_0 = 3x_0 - 2$.
Quels que soient les réels h_x et h_y,

$$f(1 + h_x, 1 + h_y) = 1 + \begin{pmatrix} h_x & h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

donc le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ est égal à 1.

III

Applications de classe $\mathscr{C}^k$

54. ✍ *L'application $f : U \to F$ est **de classe** $\mathscr{C}^1$ (ou **continûment différentiable**) lorsqu'elle est différentiable sur U et que l'application*

$$\mathrm{d}f = [M \mapsto \mathrm{d}f(M)] : U \to \mathrm{L}(E, F)$$

est continue sur U.

55. Le théorème fondamental [**56**] permet de prouver qu'une application est continûment différentiable sans avoir à expliciter sa différentielle.

56. ➙ Théorème fondamental (admis)
Soient $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p)$, une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base de F. On note $f^1, \dots, f^n$, les composantes de $f : U \to F$ relatives à la base $\mathscr{C}$:

$$\forall\, M \in U, \quad f(M) = \sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i.$$

Alors la fonction $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, pour chaque composante f^i de f, toutes les dérivées partielles

$$\partial_1(f^i),\ \dots,\ \partial_p(f^i)$$

relatives à $\mathscr{B}$ sont définies et continues sur U.

57. Exemples fondamentaux

57.1 Toute application linéaire de E dans F est de classe $\mathscr{C}^1$.

57.2 Toute application polynomiale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et ses dérivées partielles sont aussi polynomiales.

57.3 Toute fonction rationnelle de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ouvert de définition et ses dérivées partielles sont aussi rationnelles.

58. Exemples
Pour le calcul des dérivées partielles, l'espace $E = \mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique.

58.1 *Suite de* [**23.3**] – La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine $\{\mathbf{0}\}$.

58.2 La fonction f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

58.3 L'application f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = (x^2 - y^2)\,\ell\mathrm{n}(x^2 + y^2)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

58.4 L'application f définie sur $D =]-1,1[\, \times\,]-1,1[$ par

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

58.5 Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'application g définie sur $U = [x \neq 0]$ par

$$g(x,y) = \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_1^y u f'(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(xy)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

58.6 La fonction f définie par $f(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et par

$$f(x,y) = x^2 \cos\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

sur $[x \neq 0]$ est différentiable au point $(0,0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

58.7 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

est différentiable au point $(0,0)$ sans être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

III.1 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 2$

59. ✍ **Classe** $\mathscr{C}^2$
*L'application $f : U \to F$ est de **classe** $\mathscr{C}^2$ lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que ses dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.*

60. Théorème de Schwarz (admis)
Lorsqu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^2$, l'ordre dans lequel est calculée une dérivée partielle seconde est indifférent.

60.1 ➙ *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors*

$$\forall\, i \neq j, \quad \partial_i \partial_j f(M) = \partial_j \partial_i f(M).$$

60.2 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)xy}{x^2 + y^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe $\mathscr{C}^2$ car

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

60.3 *Suite de* [**58.6**] – Bien que la fonction f ne soit pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$ existent et sont égales.

61. ✍ *Le* ***laplacien**** *d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ est défini par*

$$\Delta f(M) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j \partial_j f(M).$$

Une fonction f est ***harmonique**** *sur un ouvert U lorsque son laplacien est identiquement nul sur U.*

62. Classes $\mathscr{C}^k$
Pour tout $k \geqslant 3$, on définit la classe $\mathscr{C}^k(U,F)$ de manière récursive, comme on a défini $\mathscr{C}^2(U,F)$ à partir de $\mathscr{C}^1(U,F)$.

62.1 ✍ *L'application $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^k$ lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que ses dérivées partielles $\partial_1 f, \ldots, \partial_p f$ (relatives à une base quelconque de E) sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.*

63. ✍ **Classe $\mathscr{C}^\infty$**
Une fonction appartient à la classe $\mathscr{C}^\infty(U,F)$ lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k(U,F)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

64. Exemples fondamentaux

64.1 Les applications linéaires sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

64.2 Les applications polynomiales de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

64.3 Une fonction rationnelle de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

III.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

65. Une combinaison linéaire d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

66. Composition

66.1 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathscr{C}^1(V,G)$ avec $f_*(U) \subset V$. L'application

$$\big[M \mapsto \mathrm{d}g\big(f(M)\big) \circ \mathrm{d}f(M)\big]$$

est continue de U dans $\mathrm{L}(E,G)$.

66.2 ➞ *Soient U, un ouvert de E et V, un ouvert de F. On considère deux applications $f : U \to F$ et $g : V \to G$ de classe $\mathscr{C}^1$ et on suppose que $f_*(U) \subset V$.*
La composée $(g \circ f) : U \to G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, M_0 \in U, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = \big[\,\mathrm{d}g\big(f(M_0)\big)\big] \circ \big[\,\mathrm{d}f(M_0)\big].$$

66.3 ➞ *Si $f : U \to F$ et $g : V \to G$ sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ et si $f_*(U) \subset V$, alors*

$$\mathrm{Jac}(g \circ f)(M_0) = \mathrm{Jac}(g)\big(f(M_0)\big) \times \mathrm{Jac}(f)(M_0).$$

66.4 Si $g : F \to G$ est une application linéaire, alors

$$\forall\, M_0 \in F, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = g \circ [\,\mathrm{d}f(M_0)].$$

66.5 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(I,F)$, où I est un intervalle ouvert qui contient $f_*(U)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}^1(U,F)$ et

$$\mathrm{d}(g \circ f)(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big[\,\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h})\big] \cdot g'\big(f(M_0)\big)$$

quels que soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{h} \in E$.

67. Caractérisation des fonctions constantes
Soit $f : U \to F$ et $\gamma : [0,1] \to U$, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

67.1 Si $\gamma(0) = a \in U$ et $\gamma(1) = b \in U$, alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

67.2 ➞ *Soient U, un ouvert convexe et $f \in \mathscr{C}^1(U,F)$. L'application f est constante si, et seulement si, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M)$ est l'application nulle pour tout $M \in U$.*

67.3 Soit U, un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. Si f et g sont deux applications différentiables sur U telles que

$$\forall\, M \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial g}{\partial x}(M) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{\partial g}{\partial y}(M),$$

alors $f - g$ est constante sur U.

68. ➞ **Formule de Leibniz**
Soient $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$, deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ et $\varphi : F_1 \times F_2 \to G$, une application bilinéaire.
L'application $F : U \to G$ définie par

$$\forall\, M \in U, \quad F(M) = \varphi\big(f_1(M),\, f_2(M)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\mathrm{d}F(M_0)(\boldsymbol{h}) = \varphi\big(\,\mathrm{d}f_1(M_0)(\boldsymbol{h}), f_2(M_0)\big) + \varphi\big(f_1(M_0),\ \mathrm{d}f_2(M_0)(\boldsymbol{h})\big)$$

pour tout $M_0 \in U$ et tout $\boldsymbol{h} \in E$.

69. Généralisation
Les règles de calcul dans la classe $\mathscr{C}^2$, dans les classes $\mathscr{C}^k$ et dans la classe $\mathscr{C}^\infty$ sont les mêmes que dans la classe $\mathscr{C}^1$.

Entraînement

70. Questions pour réfléchir

1. Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$; $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, deux bases de E.

1.a Les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_2$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients constants) des dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_1$.

1.b Les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Par conséquent, la définition [**59**] a bien un sens.

2. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, deux bases de E et $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, deux bases de F. On note P, la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ et Q, la matrice de passage de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_2$.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}\big(\,\mathrm{d}f(M_0)\big) = Q^{-1}\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}\big(\,\mathrm{d}f(M_0)\big)P$$

3. L'ensemble des fonctions harmoniques [**61**] de U dans $\mathbb{R}$ est est un espace vectoriel.

4. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors [**61**]

$$\Delta(fg) = \Delta f \cdot g + 2\,(\,\nabla f \,|\, \nabla g\,) + f \cdot \Delta g.$$

5. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$, combien de dérivées partielles d'ordre k faut-il calculer pour les connaître toutes ?

6. Tout produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ est encore une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. →[**68**]

7. On suppose que l'application $f : U \to F$ vérifie la propriété suivante :

$$\exists\, \eta > 0,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x_0 \in U, \quad \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Si l'ouvert U est convexe, alors l'application f est constante.

71. Calculs de gradients [66.5]
Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.

1. $\nabla(fg)(M) = g(M) \cdot \nabla f(M) + f(M) \cdot \nabla g(M)$
2. $\nabla(e^f)(M) = \exp[f(M)] \cdot \nabla f(M)$
3. $\nabla(f^2)(M) = 2f(M) \cdot \nabla f(M)$
4. Si f est strictement positive sur U, alors

$$\nabla(\ell\mathrm{n}\, f)(M) = \frac{1}{f(M)} \cdot \nabla f(M).$$

5. Si f ne s'annule pas sur U, alors

$$\nabla\Big(\frac{1}{f}\Big)(M) = \frac{-1}{f^2(M)} \cdot \nabla f(M).$$

72. Soit E, un espace euclidien.

1. La fonction f définie par

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et $\nabla f(x) = 2 \cdot x$ pour tout $x \in E$.

2. Les fonctions définies par

$$g_1(x) = \|x\|, \quad g_2(x) = \frac{1}{\|x\|} \quad \text{et} \quad g_3(x) = \frac{1}{\|x\|^2}$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ et

$$\nabla g_1(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \nabla g_2(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}, \quad \nabla g_3(x) = -2 \cdot \frac{x}{\|x\|^4}$$

pour tout $x \neq \mathbf{0}_E$. Les dérivées partielles des fonctions g_i ne sont pas définies en $x = \mathbf{0}_E$.

3. La fonction φ définie par

$$\forall\, x \neq \mathbf{0}_E, \quad \varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$ et

$$\forall\, x \neq \mathbf{0}_E,\ \forall\, h \in E, \quad \mathrm{d}\varphi(x)(h) = \frac{1}{\|x\|^2} \cdot \left(h - 2\frac{(\,x \mid h\,)}{\|x\|^2} \cdot x \right).$$

73. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, une application bilinéaire. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$, alors l'application h définie par

$$\forall\, t \in I, \quad h(t) = \varphi\big(f(t), g(t)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = \varphi\big(f'(t), g(t)\big) + \varphi\big(f(t), g'(t)\big)$$

d'après **[11.1]**.

74. Mouvement circulaire uniforme
L'arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ décrit un mouvement circulaire et uniforme : il existe deux constantes $r > 0$ et $v > 0$ telles que

$$\forall\, t \in I, \quad \big\|\gamma(t)\big\| = r \quad \text{et} \quad \big\|\gamma'(t)\big\| = v.$$

1. D'après **[73]**, le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est orthogonal au vecteur position $\gamma(t)$ ainsi qu'au vecteur accélération $\gamma''(t)$, donc il existe un scalaire $k(t)$ tel que

$$\gamma''(t) = k(t) \cdot \gamma(t).$$

2. En dérivant la relation

$$\forall\, t \in I, \quad \big(\,\gamma(t) \,\big|\, \gamma'(t)\,\big) = 0,$$

on montre que l'accélération est centrale et de norme constante :

$$\forall\, t \in I, \quad \gamma''(t) = \frac{-v^2}{r} \cdot \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

75. Moment cinétique et couple
La position par rapport à l'origine d'une particule de masse m en mouvement dans $\mathbb{R}^3$ est décrite par un arc paramétré (I, γ) de classe $\mathscr{C}^2$. Le **moment cinétique** (par rapport à l'origine) est défini par

$$\forall\, t \in I, \quad L(t) = \gamma(t) \wedge [m\gamma'(t)].$$

1. La fonction $L : I \to \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est égale à →**[73]**

$$T(t) = \gamma(t) \wedge [m\gamma''(t)].$$

2. Si la particule se déplace dans un champ de force central, alors $T(t) = \mathbf{0}$ pour tout $t \in I$ et la particule se déplace dans le plan (fixe) issu du point $\gamma(t_0)$ et normal au vecteur $L(t_0)$.

76. Champ de forces conservatif
Un **champ de forces conservatif** sur $\mathbb{R}^n$ est une application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe un **potentiel** $V \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x) = -\nabla V(x).$$

Un arc paramétré $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$ est une **particule semi-newtonienne** lorsqu'il existe des réels $m_1, \dots, m_n$ tels que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad F_i\big(\varphi(t)\big) = m_i \varphi_i''(t)$$

L'**énergie cinétique** K et l'**énergie potentielle** P de cette particule sont définies par

$$K(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \big[\varphi_i'(t)\big]^2 \quad \text{et} \quad P(t) = V\big(\varphi(t)\big).$$

Comme

$$P'(t) = \big(\,\nabla V[\varphi(t)] \,\big|\, \varphi'(t)\,\big),$$

la somme $K(t) + P(t)$ est indépendante de t : il y a **conservation de l'énergie**.

IV

Règle de la chaîne

77. La **règle de la chaîne** traduit les différentes versions de la formule de différentiation des fonctions composées **[66]** sous une forme générale et facile à mémoriser.

77.1 On considère une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction différentiable $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, telle que $f_*(V) \subset U$. D'après **[66.3]**,

$$\mathrm{Jac}(f \circ \varphi)(M) = \mathrm{Jac}(f)\big(\varphi(M)\big) \times \mathrm{Jac}\,\varphi(M)$$

pour tout $M \in U$.

77.2 L'abus de notation usuel consiste alors à considérer que les deux fonctions f et $f \circ \varphi$ représentent une même grandeur A :

1. La fonction f représente A comme une fonction des variables $x_1, \dots, x_n$.

$$A = f(x_1, \dots, x_n)$$

2. La fonction $f \circ \varphi$ représente A comme une fonction des variables $u_1, \dots, u_p$:

$$A = (f \circ \varphi)(u_1, \dots, u_p)$$

comme si, cette fois, les variables $x_1, \dots, x_n$ étaient des fonctions de $u_1, \dots, u_p$.

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i = x_i(u_1, \dots, u_p).$$

77.3 Les coefficients de $\mathrm{Jac}(f \circ \varphi)(M) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ sont alors notés

$$\frac{\partial A}{\partial u_j} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial A}{\partial u_j}(M),$$

ceux de $\mathrm{Jac}(f)[\varphi(M)] \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont notés

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial A}{\partial x_i}[\varphi(M)]$$

et ceux de $\mathrm{Jac}\,\varphi(M) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont notés

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(M).$$

77.4 ➙ *De la sorte, la formule de dérivation des fonctions composées devient*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \frac{\partial A}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}.$$

77.5 La simplicité de cette formule repose sur le fait que x_i joue tantôt le rôle de variable (au dénominateur), tantôt le rôle de fonction (au numérateur).

77.6 Un paradoxe
On suppose que $w = x+y+z$ avec $z = x+y$. D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

et une interprétation erronée conduit à $\partial w/\partial z = 0$ alors que manifestement $\partial w/\partial z = 1$. Expliquer !

IV.1 Calculs au premier ordre

78. Formules générales
Toutes les fonctions considérées ici sont supposées de classe $\mathscr{C}^1$.

78.1 Pour $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

et pour $g(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

78.2 Pour $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

et pour $F(x) = f\big(x, y(x), z(x)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

78.3 Pour $F(x,y) = f\big(x, y, z(x,y)\big)$, →[77.6]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \quad\text{et}\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}.$$

78.4 Pour $F(x) = f\big(x, y(x), z(x, y(x))\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

78.5 Pour $F(s,t) = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \quad\text{et}\quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

79. Applications

79.1 Dériver $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ avec :

$$\begin{aligned}&f(x,y) = e^{x+y}, && x(t) = \cos t, && y(t) = \sin t\,;\\ &f(x,y) = x^2+y^2, && x(t) = e^t, && y(t) = \ell\mathrm{n}\, t.\end{aligned}$$

79.2 Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y) = f\big(g(x,y)\big)$$

avec $f(z) = \sin z$ et $g(x,y) = 3x - 4y$.

79.3 Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y) = f\big(g(x,y),\, h(x,y)\big)$$

avec $f(u,v) = u - v$, $g(x,y) = x^2y$ et $h(x,y) = xy^2$.

IV.2 Calculs au second ordre

80. Pour calculer une dérivée seconde, il suffit de savoir dériver la dérivée première !

80.1 Pour dériver la formule [77.4], il faut savoir la lire : il s'agit d'une somme

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_k \partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)$$

dont chaque terme est un produit (formule de Leibniz)

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u_j} + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j}$$

où le premier facteur $\partial A/\partial x_i$ est une composée de deux fonctions différentiables (règle de la chaîne) →[77.3]

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial x_\ell \partial x_i}\frac{\partial x_\ell}{\partial u_k}.$$

80.2 Les calculs deviennent longs et l'un des avantages considérables de la notation de Leibniz est de pouvoir contrôler facilement l'homogénéité du résultat.

81. Formules générales
Toutes les fonctions considérées ici sont de classe $\mathscr{C}^2$. →[60.1]

81.1 *Suite de* [78.1] – Pour $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2.\end{aligned}$$

81.2 *Suite de* [78.2] – Pour $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

81.3 *Suite de* [78.5] – Pour $F(s,t) = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2,\\ \frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right).\end{aligned}$$

Applications

82. On suppose que $g = g(u,v)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer en fonction des dérivées partielles de g les dérivées partielles secondes de

$$f(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

avec $(u,v) = (xy, 2x+3y)$, puis avec $(u,v) = (x^2y, 3x+2y)$.

83. On suppose que $g = g(u)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

83.1 Si $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = g\big(u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et →[61]

$$\Delta f = g''(u)\|\nabla u\|^2 + g'(u)\Delta u.$$

83.2 Fonctions harmoniques radiales
Sur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on pose →[72]

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

1.
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}$$

2. La fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\, u > 0, \quad g''(u) + \frac{n-1}{u} \cdot g'(u) = 0$$

3. Si $n \geqslant 3$ et si f est une fonction harmonique radiale sur Ω, alors il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{a}{\|\boldsymbol{x}\|^{n-2}} + b.$$

83.3 On choisit maintenant

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

4.
$$\|\nabla u\|^2 = 4\frac{u + u^2}{z^2} \quad \text{et} \quad \Delta u = \frac{4 + 6u}{z^2}.$$

5. La fonction $f = g(u)$ est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\, u > 0, \quad 2(u + u^2)g''(u) + (3u + 2)g'(u) = 0$$

c'est-à-dire s'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, u > 0, \quad g(u) = K_1 \operatorname{Arg\,th} \sqrt{1 + u} + K_2.$$

84. Soit $f = f(x, y)$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. La fonction g définie par

$$g(u, v) = f(u + v, uv)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si g est harmonique **[61]** sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (x^2 - 2y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert $\Omega = [x^2 - 4y > 0]$.

IV.3 Changement de variables

85. Un **changement de variables** est une application continûment différentiable φ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui permet d'exprimer une fonction des variables $y_1, \dots, y_n$:

$$A = g(y_1, \dots, y_n)$$

comme une fonction des variables $x_1, \dots, x_n$: →[77.2]

$$A = f(x_1, \dots, x_n) = (g \circ \varphi)(x_1, \dots, x_n)$$

mais aussi d'exprimer inversement une fonction des variables $x_1, \dots, x_n$:

$$A = f(x_1, \dots, x_n)$$

comme une fonction des variables $y_1, \dots, y_n$:

$$A = g(y_1, \dots, y_n) = (f \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_n).$$

85.1 ✍ *Une application est un **changement de variables***, ou **difféomorphisme***, lorsqu'elle réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ dont la bijection réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.*

85.2 Tout automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ est un difféomorphisme.

85.3 Si $\varphi : U \to V$ est un difféomorphisme, alors pour tout $M \in U$, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}\varphi(M)$ est inversible et

$$\big[\,\mathrm{d}\varphi(M)\big]^{-1} = \mathrm{d}(\varphi^{-1})(N)$$

avec $N = \varphi(M) \in V$.

85.4 Si φ est un difféomorphisme et si $N = \varphi(M)$, alors les matrices jacobiennes

$$(\operatorname{Jac}\varphi)(M) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad (\operatorname{Jac}\varphi^{-1})(N) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

sont inversibles et inverse l'une de l'autre.

85.5 La règle de la chaîne s'écrit

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

en fonction des variables $x_1, \dots, x_n$ et

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$$

en fonction des variables $y_1, \dots, y_n$.

Changement de variables linéaire

86. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to F$.

86.1 L'automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, représenté dans la base canonique par la matrice inversible

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, dont la réciproque est également linéaire et donc de classe $\mathscr{C}^1$.

86.2 Calcul des dérivées partielles
La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par

$$g(u, v) = (f \circ \varphi)(u, v) = f(au + bv,\, cu + dv)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Dans ce cas, en fonction des variables u et v,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = a\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = b\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y}$$

et en fonction des variables x et y →[85.4]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{\Delta}\,\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{c}{\Delta}\,\frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-b}{\Delta}\,\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{a}{\Delta}\,\frac{\partial g}{\partial v}$$

où $\Delta = \det(\varphi) = ad - bc$.

86.3 Calcul des dérivées partielles secondes
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après **[80.1]**,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ac\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2bd\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + d^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad + bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + cd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des variables u et v.
On obtient des formules analogues pour exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées partielles secondes de g.

Coordonnées polaires

87.1 La **base polaire** est la base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

87.2 Contrairement à la base canonique :

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0), \qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1)$$

dont les vecteurs sont fixes, les vecteurs de la base polaire varient en fonction du paramètre θ et

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{u}_\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{u}_r.$$

87.3 D'après la formule de changement de base,

$$\boldsymbol{v} = v_x \cdot \boldsymbol{e}_x + v_y \cdot \boldsymbol{e}_y = v_r \cdot \boldsymbol{u}_r + v_\theta \cdot \boldsymbol{u}_\theta$$

si, et seulement si,

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \qquad v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$$

c'est-à-dire

$$v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta, \qquad v_y = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta.$$

88. Les **coordonnées polaires** d'un point $M \in \mathbb{R}^2$ distinct de l'origine sont les réels $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que

$$\boldsymbol{OM} = r \cdot \boldsymbol{u}_r = (r\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_x + (r\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_y.$$

89. Principes généraux

89.1 Soit A, une grandeur scalaire dépendant de deux paramètres et représentée par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$A = f(x,y)$$

1. Calculer le *laplacien de A en coordonnées polaires*, c'est exprimer la grandeur scalaire

$$\Delta A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de la fonction g définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

2. Calculer le *gradient de A en coordonnées polaires*, c'est décomposer la grandeur vectorielle

$$\nabla A = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

dans la base polaire $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$ en exprimant ses coordonnées en fonction des dérivées partielles de la fonction g. →**[87.3]**

89.2 Si $\boldsymbol{A}$ est un champ de vecteurs dépendant de deux paramètres et représenté par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{A} = f(x,y) = f_x(x,y) \cdot \boldsymbol{e}_x + f_x(x,y) \cdot \boldsymbol{e}_y$$

calculer la *divergence de $\boldsymbol{A}$ en coordonnées polaires*, c'est exprimer la grandeur scalaire

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

en fonction des coordonnées g_r et g_θ de la fonction g relatives à la base polaire $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$: →**[87.3]**

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g_r(r,\theta) \cdot \boldsymbol{u}_r + g_\theta(r,\theta) \cdot \boldsymbol{u}_\theta.$$

90. Formulaire

L'application φ définie par

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert

$$U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$$

sur l'ouvert

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus [x \leqslant 0] \cap [y = 0].$$

On peut démontrer que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, sans qu'il soit nécessaire d'expliciter cette bijection réciproque (*théorème d'inversion globale*).

90.1 Matrices jacobiennes [85.4]

En considérant x et y comme des fonctions de r et θ :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

et en considérant $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ comme des fonctions de x et y :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

90.2 Matrices hessiennes [80.1]

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta & \dfrac{\partial^2 x}{\partial r \partial \theta} = -\sin\theta \\
\dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta & \dfrac{\partial^2 y}{\partial r \partial \theta} = \cos\theta \\
\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{r^2 - x^2}{r^3} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{r^2 - y^2}{r^3} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \dfrac{-xy}{r^3} \\
\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{r^4} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{r^4} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{r^4}.
\end{array}$$

91. Résultats usuels [89]

$$\Delta A = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

$$\nabla A = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \boldsymbol{u}_\theta$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r} g_r + \frac{\partial g_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_\theta}{\partial \theta}$$

Coordonnées sphériques

92. Pour $0 \leqslant \theta\pi$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, on considère la base orthonormée définie par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_r &= \sin\theta\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y + \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{u}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y - \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{u}_\varphi &= -\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y.
\end{aligned}$$

92.1 Les **coordonnées sphériques** d'un point $M \in \mathbb{R}^3$ distinct de l'origine sont les trois réels

$$r > 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

définis par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{OM} &= r \cdot \boldsymbol{u}_r \\
&= (r\sin\theta\cos\varphi) \cdot \boldsymbol{e}_x + (r\sin\theta\sin\varphi) \cdot \boldsymbol{e}_y + (r\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

92.2 Les **composantes sphériques** d'un champ de vecteurs $A : U \to \mathbb{R}^3$ sont les trois fonctions A_r, A_θ et A_φ de U dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\forall\, M \in U, \quad \boldsymbol{A}(M) = A_r(M) \cdot \boldsymbol{u}_r + A_\theta(M) \cdot \boldsymbol{u}_\theta + A_\varphi(M) \cdot \boldsymbol{u}_\varphi.$$

92.3 Calculer en coordonnées sphériques, c'est utiliser la fonction des variables r, θ et φ qui représente une grandeur scalaire :

$$A = g(r, \theta, \varphi)$$

ou les fonctions qui représentent en fonction des variables r, θ et φ les composantes sphériques d'un champ de vecteurs :

$$\boldsymbol{A} = g_r(r, \theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{u}_r + g_\theta(r, \theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{u}_\theta + g_\varphi(r, \theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{u}_\varphi.$$

Dans ce dernier cas, comme pour les coordonnées polaires, les vecteurs $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{u}_\theta$ et $\boldsymbol{u}_\varphi$ sont eux-mêmes des fonctions des variables θ et φ.

93. L'application ψ exprime les coordonnées (x, y, z) d'un point dans la base canonique en fonction des coordonnées sphériques r, θ et φ : →**[92.1]**

$$\psi(r, \varphi, \theta) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert

$$U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}[$$

sur l'ouvert

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus [x \leqslant 0] \cap [y = 0].$$

93.1 Son jacobien est égal à $r^2 \cos\theta$ et on peut démontrer que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V (*théorème d'inversion globale*).

93.2 On peut donc considérer les trois coordonnées sphériques r, θ et φ comme des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert V des coordonnées cartésiennes x, y et z et en déduire les relations suivantes.

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Entraînement

94. Questions pour réfléchir

1. Proposer une interprétation physique de la règle de la chaîne **[77.4]**.
2. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, considéré comme un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant rapporté à sa base canonique, comparer la matrice de φ, la matrice jacobienne de φ au point M et la matrice jacobienne de φ^{-1} au point $N = \varphi(M)$.

95. Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par

$$f(x, y) = \int_x^y e^t \,\ell\mathrm{n}\, t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = \int_{2x}^{y^2} e^t \,\ell\mathrm{n}(tz) \,\mathrm{d}t$$

dont on précisera l'ouvert de définition.

96. Soient φ et ψ, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

96.1 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

96.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x, y) = \psi\big(x + \varphi(y)\big)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

97. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

97.1 La fonction u définie par $u(x, y) = f({}^{y}/_{x})$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sur son ouvert de définition.

97.2 La fonction u définie par $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sur son ouvert de définition.

98. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + t, y + t) = f(x, y)$$

alors

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

99. Équation de la chaleur

Quelles que soient les constantes réelles a et k, les fonctions f_a et g définies par

$$f_a(x, t) = e^{-k^2 a^2 t} \sin ax \quad \text{et} \quad g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\frac{-x^2}{4k^2 t}$$

vérifient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

100. Équation des ondes en dimension 3

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$, une constante. Quelle que soit la fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{r}\, g(t - {}^{r}/_{c}) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

101. La fonction F définie par $F(x, y) = \varphi({}^{y}/_{x})$, où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le demi-plan ouvert $U = [x > 0]$ et →**[61]**

$$\Delta F(x, y) = \frac{2y}{x^3} \varphi'({}^{y}/_{x}) + \frac{x^2 + y^2}{x^4} \varphi''({}^{y}/_{x}).$$

En particulier, la fonction F est harmonique sur U si, et seulement si, la fonction φ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (1 + t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$$

c'est-à-dire si $\varphi = [t \mapsto K_1 \operatorname{Arctan} t + K_2]$.

102. L'application φ définie sur $U = [x < y]$ par

$$\varphi(x, y) = \big(s(x, y), p(x, y)\big) = (x + y,\ xy)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U sur $V = [s^2 - 4p > 0]$.

1. Son jacobien est égal à $(x - y)$ et la bijection réciproque est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V (*théorème d'inversion globale*).
2. Par inversion de la jacobienne de φ,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{x - y}, \quad \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{y - x}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{y}{y - x}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{x - y}$$

d'où en particulier

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{2xy}{(y - x)^3}.$$

Comparer avec la dérivée partielle seconde de $s - \sqrt{s^2 - 4p}$ par rapport à s.

103. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, on pose

$$\varphi(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big) = \frac{k^2}{r^2} \cdot (x,y,z)$$

où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

1. L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Son jacobien est égal à $-k^6/r^6$.

2. En remarquant que

$$r^2 = \frac{k^4}{X^2+Y^2+Z^2},$$

on peut démontrer que φ réalise une bijection de U sur U, expliciter la bijection réciproque et en déduire que cette réciproque est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

3.

$$x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y} + z\frac{\partial X}{\partial z} = -X \tag{1}$$

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial z}\Big)^2 = \frac{k^4}{r^4} \tag{2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{-2X}{r^2}. \tag{4}$$

104. Soit $v > 0$. La fonction définie par

$$u(x,t) = \alpha\big(1 - \mathrm{th}^2[\beta(x+vt)]\big)$$

est une solution sur $\mathbb{R}^2$, non constante, de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

si, et seulement si, $a = -{}^{v}\!/_{2}$ et $b = {}^{\sqrt{v}}\!/_{2}$.

105. Fonctions analytiques
Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$. L'application complexe f définie sur l'ouvert $U = [x^2 + y^2 < R^2]$ par

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+iy)^n$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur U **[61]**.

106. Un prolongement par continuité

1. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

tend vers $f'(0)$ au voisinage de $\mathbf{0}$.

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction F peut être prolongée en une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Ce prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

V

Équations aux dérivées partielles

107. Une **équation aux dérivées partielles** (en abrégé : EDP) est une contrainte imposée à une fonction $f \in \mathscr{C}^k(\Omega,\mathbb{R})$: cette contrainte relie la fonction f à ses dérivées partielles.

108. Dans les équations étudiées, l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est définie est toujours un rectangle. →**[109.3]**

$$\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2.$$

V.1 Équations élémentaires

109. Équation du premier ordre
109.1 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Alors, pour tout $y_0 \in]c,d[$, l'application $[x \mapsto f(x,y_0)]$ est constante sur $]a,b[$.
109.2➞ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

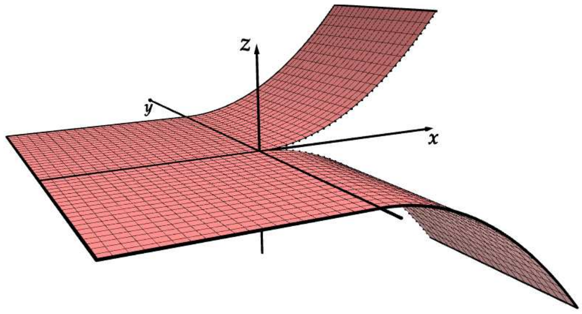
si, et seulement si, il existe $g \in \mathscr{C}^1(]c,d[,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(y).$$

109.3 Contre-exemple fondamental
Sur l'ouvert $\Omega = [y \neq 0] \cup [x < 0] \subset \mathbb{R}^2$, qui est connexe par arcs, il existe une application $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

et dont la valeur dépend quand même de y. →**[108]**



110. Équation du second ordre [108]
110.1 On suppose que trois fonctions f, g et h sont reliées par

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

Si $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, alors g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.
110.2➞ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

si, et seulement si, il existe g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

110.3➞ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

si, et seulement si, il existe $g \in \mathscr{C}^2(]a,b[)$ et $h \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(x) + h(y).$$

111. *Suite de* **[108]** – Certaines EDP très simples sont des équations différentielles à peine déguisées.
111.1 Avec $0 < a < b$, une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de l'équation :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$$

si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y).$$

111.2 Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ est solution de l'équation :

$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \omega^2 f(x,y) = 0$$

(où $\omega > 0$) si, et seulement si, il existe deux fonctions g_1 et g_2, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ telles que

$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g_1(y)\cos\omega x + g_2(y)\sin\omega x.$$

V.2 Résolution par changement de variables

112. Un changement de variables bien choisi permet parfois de ramener une équation aux dérivées partielles à l'un des cas élémentaires précédents ou à une équation différentielle qu'on saura résoudre.

Changements de variables linéaires

113. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

si, et seulement si, la fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$g(u,v) = f(x,y) \quad \text{avec} \quad \{u = x - y, v = y\}$$

vérifie l'EDP élémentaire suivante : →**[109.2]**

$$\forall\, (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0.$$

114. Équation des ondes et principe de Huyghens
Soit $c > 0$.
114.1 Si g et h sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct)$$

vérifie l'**équation des ondes** :

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0.$$

114.2 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, une solution de l'équation des ondes.
1. L'application définie par

$$\varphi(x,t) = (x+ct, x-ct)$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct).$$

114.3 Si une corde horizontale dont les extrémités sont fixés est mise en vibration, l'expression $f(x,t)$ permet de représenter l'écart (vertical) à l'instant t du point d'abscisse x par rapport à sa position d'équilibre. Cette vibration paraît ici comme la superposition de deux ondes progressives de sens opposés.
115. Autres exemples
Les EDP linéaires à coefficients constants peuvent se ramener à une EDP élémentaire par un changement de variables linéaire bien choisi.
115.1 Résoudre les EDP suivantes en effectuant les changements de variables indiqués. →**[86]**

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \{u = 2x+y,\ v = 3x+y\}$$

(2) $$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \{u = x+y,\ v = 2x+3y\}$$

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y) \qquad \{u = x,\ v = y-x\}$$

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2 \qquad \{u = x+y,\ v = x-y\}$$

115.2 L'expression

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$

est le produit scalaire de ∇f avec un vecteur $\boldsymbol{n} = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$. Si $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ et si $f = g \circ \varphi$, alors

$$(\,\nabla f \,|\, \boldsymbol{n}\,) = (\,\nabla g \,|\, \varphi(\boldsymbol{n})\,)$$

et on peut choisir φ pour que l'EDP en g soit élémentaire.
115.3 Résoudre les EDP suivantes au moyen de changements de variables linéaires. →**[86]**

(5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(6) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(7) $$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Calculs en coordonnées polaires [90]

116. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

si, et seulement si, la fonction de classe $\mathscr{C}^1$

$$g \;:\;]0,+\infty[\times]0,\pi[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

vérifie l'EDP suivante : →**[111.1]**

$$\forall\, (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[, \quad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = g(r,\theta).$$

117. Soit $g = f \circ \varphi$.
117.1
1. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, alors la fonction $[\theta \mapsto g(r,\theta)]$ admet un prolongement 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $r > 0$.
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction g une limite finie au voisinage de $\mathbf{0}$.

117.2 Fonctions radiales
La relation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}$$

permet de résoudre les EDP suivantes.

(1) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(2) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

(3) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

(4) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - f(x,y) = -(x^2+y^2)$$

(5) $$\Big(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big)f(x,y) = -(x^2+y^2)$$

Interpréter géométriquement la première équation.

117.3 Fonctions orthoradiales
La relation
$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$
permet de résoudre les EDP suivantes.

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{6}$$
$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{7}$$
$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y) \tag{8}$$

Interpréter géométriquement la première équation.

118. Fonctions harmoniques
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

118.1 Si f est une fonction radiale : $f(x,y) = g(r)$, alors la fonction f est harmonique [**61**] sur Ω si, et seulement si,
$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) = 0.$$

118.2 Si f est une fonction orthoradiale : $f(x,y) = g(\theta)$, alors la fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{r^2}g''(\theta) = 0.$$

Calculs en coordonnées sphériques

119. Fonctions harmoniques [93]
Soient $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que
$$\forall\, (x,y,z) \in \Omega, \quad f(x,y,z) = g(r).$$

1.
$$\Delta f(x,y,z) = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r).$$

2. La fonction f est un vecteur propre radial du laplacien si, et seulement si, il existe un réel λ tel que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle
$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) - \lambda g(r) = 0.$$

Entraînement

120. L'application φ définie sur l'ouvert $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par
$$\varphi(u,v) = \Big(\frac{u^2+v^2}{2}, v\Big)$$
réalise une bijection de Δ sur l'ouvert $U = [y^2 < 2x]$. Cette bijection et sa réciproque sont de classe $\mathscr{C}^2$.
Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifie l'équation
$$(2x - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - f = 0$$
si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que
$$f(x,y) = A(y)\operatorname{ch}\sqrt{2x-y^2} + B(y)\operatorname{sh}\sqrt{2x-y^2}$$
pour tout $(x,y) \in U$.

121. L'application φ définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par
$$\varphi(x,y) = \Big(xy, \frac{x}{y}\Big)$$
réalise une bijection de U sur U. Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, comme sa bijection réciproque.

121.1 On utilise φ pour effectuer le changement de variables :
$$(u,v) = \varphi(x,y).$$

1. En inversant la jacobienne de φ, on obtient →[**85.4**]
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{y}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-y^2}{2x}.$$

2. Soient f et g, deux fonctions définies sur U, telles que
$$\forall\, (x,y) \in U, \qquad f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g(u,v).$$

2.a La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si, et seulement si, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2.b
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2u\frac{\partial g}{\partial u}$$

2.c
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2v\Big[2u\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big) - \frac{\partial g}{\partial v}\Big]$$

121.2 EDP du premier ordre
Résoudre les EDP suivantes.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \tag{1}$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y) - 2 \tag{2}$$

121.3 EDP du second ordre
La résolution sur U de l'EDP
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$
se ramène à celle de l'équation différentielle
$$\forall\, t > 0, \quad 2tz'(t) - z(t) = 0.$$

122. Soit φ, l'application définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par
$$\varphi(x,y) = \Big(x, \frac{y}{x}\Big).$$

122.1 L'application φ est une bijection de U sur U. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$, ainsi que sa bijection réciproque. De plus,
$$(\operatorname{Jac}\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix}, \ (\operatorname{Jac}\varphi^{-1})(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

122.2 Soient $f(x,y)$ et $g(u,v)$, deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, telles que
$$\forall\, (x,y) \in U, \quad g(u,v) = (g \circ \varphi)(x,y) = f(x,y).$$

1. La fonction f est une solution de
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$$
sur U si, et seulement si, il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$$\forall\, (u,v) \in U, \quad g(u,v) = v\,\ell\mathrm{n}\, u + h(v).$$

2.a
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}\Big[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big]$$

2.b La fonction f est une solution de
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
sur l'ouvert U si, et seulement si, il existe deux applications a_1 et a_2 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, (u,v) \in U, \quad g(u,v) = a_1(v)u + a_2(v).$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

123. Questions pour réfléchir

1. La propriété [**9.3**] subsiste-t-elle si l'ensemble de définition de f n'est pas un voisinage du point M_0 ?

2. L'application linéaire tangente au point M_0 s'écrit

$$\mathrm{d}f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0)\,\mathrm{d}x_j.$$

Quelle est la nature algébrique des expressions $\mathrm{d}x_j$? On a coutume d'interpréter physiquement $\mathrm{d}x_j$ comme une variation infinitésimale de la coordonnée x^j. Commenter.

3. Relier la formule de Leibniz qui exprime la dérivée de $f(\varphi(t), \psi(t))$ à la formule de différentiation des fonctions composées.

4. On suppose que, pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \in E$, l'application f admet une dérivée selon le vecteur $\boldsymbol{v}$ en M_0. L'application f est-elle différentiable en M_0 ?

5. La base polaire $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et cependant

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(M) \neq \mathrm{d}f(M)(\boldsymbol{e}_\theta).$$

6. L'application $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ si, et seulement si, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa différentielle $\mathrm{d}f : U \to E^*$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

7. Une application $f : E \to F$ est **polynomiale** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ telles que les composantes de f relatives à la base $\mathscr{C}$ sont des fonctions polynomiales des coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$.

7.a La notion d'application polynomiale est indépendante des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ choisies.

7.b Si la fonction $f : E \to F$ est polynomiale, alors sa différentielle $\mathrm{d}f : E \to \mathrm{L}(E,F)$ est polynomiale.

8. On suppose que $f \in \mathscr{C}^1(U, F)$ est une application telle que $\mathrm{d}f(M)$ soit l'application nulle pour tout $M \in U$. Alors l'application f est **localement constante** au sens où, pour tout $M_0 \in U$,

$$\exists\, V \in \mathscr{V}(M_0),\ \exists\, \boldsymbol{u} \in F, \quad \forall\, M \in V, \quad f(M) = \boldsymbol{u}.$$

L'application f est-elle constante ? Et si on suppose que U est connexe par arcs ?

Approfondissement

124. Si $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est une application **contractante** :

$$\exists\, 0 < k < 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|g'(x)\right| \leqslant k$$

alors le jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = \big(x + g(y), y + g(x)\big)$$

n'est jamais nul.

125. Fonctions harmoniques et propriété de la moyenne
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et g, la fonction définie sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ par

$$g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

1. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et si

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

alors φ est constante.

2. Si la fonction f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ [**61**], alors

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0,$$

l'expression $r\varphi'(r)$ est constante et la fonction φ est constante. Interpréter.

Fonctions implicites

126. Soit F, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$.

126.1 Soit $M_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0, x_{d+1}^0)$, un point de l'hypersurface $X = [F(M) = 0]$. Si

$$\frac{\partial F}{\partial x_{d+1}}(M_0) \neq 0,$$

alors le **théorème des fonctions implicites** affirme qu'il existe un voisinage

$$\mathcal{V}_{d+1} = \mathcal{V}_d \times \Big]x_{d+1}^0 - \alpha, x_{d+1}^0 + \alpha\Big[$$

du point M_0 dans $\mathbb{R}^{d+1}$ avec

$$\mathcal{V}_d = \Big]x_1^0 - \alpha, x_1^0 + \alpha\Big[\times \cdots \times \Big]x_d^0 - \alpha, x_d^0 + \alpha\Big[$$

et une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{V}_d$, tels que l'hypersurface X puisse être représentée comme le graphe de la fonction g au voisinage de M_0.

$$\left\{\begin{matrix}(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathcal{V}_{d+1} \\ F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0\end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix}(x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{V}_d \\ x_{d+1} = g(x_1, \dots, x_d)\end{matrix}\right\}$$

On dit alors que l'équation $F(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = 0$ définit implicitement x_{d+1} comme une fonction des variables x_1, …, x_d : il est en général impossible de donner une expression simple de la fonction g.

126.2 On suppose que $y = g(x)$ sur la courbe $[F(x,y) = 0]$ au sens où

$$F\big(x, g(x)\big) = 0$$

sur un voisinage de x_0. Alors

$$g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

pour tout x voisin de x_0.

126.3 On suppose que $z = g(x,y)$ sur la surface $[F(x,y,z) = 0]$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de F.

127. Soient $F = (F_1, \dots, F_p) : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0),$$

un point de l'hypersurface $X = [F(M) = 0]$.

127.1 Si la matrice carrée (extraite de la jacobienne de F au point M_0)

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(M_0)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ n+1 \leqslant j \leqslant n+p}} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est inversible, alors le **théorème des fonctions implicites** affirme qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_n$ du point

$$M_0' = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage $\mathcal{V}_p$ du point

$$M_0'' = (x_{n+1}^0, \dots, x_{n+p}^0)$$

dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_p$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que X puisse être localement représentée comme le graphe de la fonction g.

$$\left\{\begin{matrix}M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' \in \mathcal{V}_p \\ F(M', M'') = 0\end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix}M' \in \mathcal{V}_n \\ M'' = g(M')\end{matrix}\right\}$$

127.2 En particulier, si $F = (F_1, F_2) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, alors la ligne de niveau $X = [F(M) = 0]$ peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$\Sigma_1 = [F_1(M) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [F_2(M) = 0].$$

Si en un point $M_0 \in X$ les dérivées partielles

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0)$$

ne sont pas nulles, alors X peut être vue localement comme l'intersection des deux surfaces

$$[z = g_1(x,y)] \quad \text{et} \quad [z = g_2(x,y)].$$

Si de plus la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(M_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix}$$

est inversible, alors X peut être vue localement comme une courbe paramétrée :

$$(y,z) = \big(f_1(x), f_2(x)\big).$$

127.3 On suppose que $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$ sur la courbe

$$[F_1(x,y,z) = 0] \cap [F_2(x,y,z) = 0].$$

Exprimer les dérivées de f_1 et f_2 en fonction des dérivées partielles de F_1 et de F_2.

Pour aller plus loin

128. Questions pour réfléchir

1. On suppose que f est différentiable en $M_0 \in U$.

1.a Définir le **sous-espace affine tangent** au graphe de f au point M_0.

1.b En donner une représentation paramétrique et en déduire sa dimension.

1.c Considérer le cas d'une fonction numérique $f : U \to \mathbb{R}$; le cas d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$.

2. Comment définir la différentielle seconde d'une application de classe $\mathscr{C}^2$?

129. Fonctions homogènes

Une fonction f, définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, est dite **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall\, u \in U,\ \forall\, t > 0, \quad f(tu) = t^\alpha f(u).$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U)$, une fonction homogène de degré α.

1.a Si $\alpha \geqslant 1$, alors les dérivées partielles f'_x et f'_y sont homogènes de degré $(\alpha - 1)$.

1.b Il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ de période 2π telle que

$$\forall\, (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^\alpha g(\theta).$$

Condition pour que f admette un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$.

2.a Si f vérifie la relation

$$(\star) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f,$$

alors, pour tout $(x,y) \in U$, la fonction définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi(t) = f(tx, ty)$$

est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$tx'(t) = \alpha x(t)$$

et la fonction f est homogène de degré α.

2.b Étudier la réciproque.

130. Homographies et similitudes

On considère la fonction f définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}, \quad f(z) = \frac{2z+1}{z+2}$$

comme une fonction de $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\forall\, (x,y) \in U, \quad \varphi(x,y) = \big(\mathfrak{Re}\, f(x+iy), \mathfrak{Im}\, f(x+iy)\big).$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Pour tout point $M \in U$, comme il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\operatorname{Jac} \varphi(M) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice orthogonale $P \in O_2(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{Jac} \varphi(M) = \lambda P$.

131. Image d'un arc paramétré par une fonction $\mathscr{C}^1$

On suppose que $f : U \to F$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour tout $M_0 \in U$, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est un isomorphisme de E sur F.

On suppose que les deux supports Γ_1 et Γ_2 de deux arcs paramétrés (I_1, γ_1) et (I_2, γ_2) ont un point commun

$$M_0 = \gamma_1(s_1) = \gamma_2(t_2).$$

1. Définir l'angle formé par les deux courbes Γ_1 et Γ_2 au point M_0.
2. Comparer cet angle avec l'angle formé par $f_*(\Gamma_1)$ et $f_*(\Gamma_2)$ en $P_0 = f(M_0)$.
3. Étudier le cas où $\mathrm{d}f(M_0)$ est une similitude.

132. Développement limité de det

Lorsque la matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tend vers la matrice nulle,

$$\det(I_n + H) = 1 + \operatorname{tr}(H) + o(H)$$

et, en notant C_M, la comatrice d'une matrice inversible M,

$$\det(M + H) = \det M + \operatorname{tr}({}^tC_M H) + o(H).$$

On retrouve le résultat de **[39]** par densité.