Composition de Mathématiques

Le 2 mars 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

❖ Problème ❖

Dans tout le problème, on note E*, l'espace vectoriel des fonctions continues de* $[0,\pi]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et on considère une application*

$$K : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$$

continue, non identiquement nulle et symétrique au sens où :

$$\forall\, 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \quad K(x,y) = K(y,x).$$

Une telle application K *est appelée un* ***noyau symétrique****.*
On admettra *que, pour tout* $x \in [0,\pi]$*, l'application*

$$k_x = [t \mapsto K(t,x) = K(x,t)]$$

est continue sur $[0,\pi]$ *et qu'il existe un réel* $M > 0$ *tel que*

$$\forall\, 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \qquad \left|K(x,y)\right| \leqslant M.$$

Partie A.

Pour toute fonction $f \in E$*, on note*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]} \left|f(t)\right|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

Quelles que soient les fonctions f *et* g *de* E*, on note*

$$\langle\, f \,|\, g\,\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt.$$

On note également

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi f^2(t)\,dt}.$$

2. Démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E. Que dire de l'application $\|\cdot\|_2$?

3. a. Démontrer qu'il existe une constante positive K_1 telle que

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_2 \leqslant K_1\|f\|_\infty.$$

3. b. Existe-t-il une constante positive K_2 qui vérifie la propriété suivante ?

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant K_2\|f\|_2$$

☞ *On pourra considérer les fonctions* $f_n = [t \mapsto t^n]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

4. Démontrer que l'application

$$\Phi = \left[x \mapsto \int_0^\pi \left|K(x,y)\right|\,dy\right]$$

est continue sur $[0,\pi]$.

On admettra *que, pour les mêmes raisons, l'application*

$$\left[x \mapsto \int_0^\pi K^2(x,y)\,dy\right]$$

est aussi continue sur $[0,\pi]$*.*

On appelle ***équation intégrale de Fredholm (de première espèce)*** *toute équation de la forme*

$$\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy = \Phi(x)$$

où le noyau K *et le second membre* Φ *sont donnés, la fonction continue* f *étant l'inconnue.*
Pour toute fonction $f \in E$*, nous noterons ici*

$$\forall\, x \in [0,\pi], \quad \mathfrak{F}(f)(x) = \int_0^\pi K(x,y)f(y)\,dy.$$

(La lettre $\mathfrak{F}$ *est un* F *gothique.)*

5. Soit $f \in E$. Démontrer que l'application $\mathfrak{F}(f)$ est bien définie et appartient bien à l'espace E. Vérifier que $\mathfrak{F}$ est un endomorphisme de E.

6. Démontrer qu'il existe une constante positive A telle que

$$\forall\, f \in E, \qquad \left\|\mathfrak{F}(f)\right\|_\infty \leqslant A\cdot\|f\|_\infty.$$

7. En déduire que le spectre de $\mathfrak{F}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

8. En appliquant l'inégalité de Schwarz, démontrer qu'il existe une constante positive B_0 telle que

$$\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in [0,\pi], \quad \left|\mathfrak{F}(f)(x)\right| \leqslant B_0\cdot\|f\|_2.$$

En déduire qu'il existe une constante positive B telle que

$$\forall\, f \in E, \qquad \left\|\mathfrak{F}(f)\right\|_2 \leqslant B\cdot\|f\|_2.$$

9. On *admet* que

$$\forall\, f, g \in E, \qquad \left\langle\, \mathfrak{F}(f) \,\middle|\, g\,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, \mathfrak{F}(g)\,\right\rangle.$$

Que peut-on en déduire au sujet des sous-espaces propres de l'endomorphisme $\mathfrak{F}$?

10. Justifier l'existence de

$$\Omega = \left(\max_{x\in[0,\pi]} \int_0^\pi \left|K(x,y)\right|\,dy\right)^{-1}.$$

On rappelle que $\mathfrak{F}^0$ désigne l'identité de E *et que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{F}^{n+1} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^n \circ \mathfrak{F}.$$

11. Soient $h \in E$ et $\lambda \in]-\Omega, \Omega[$.

11. a. Démontrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \mathfrak{F}^n(h)(x)$$

est bien définie et que l'application S appartient à E.

11. b. Démontrer que S est une solution de l'équation

$$f - \lambda \mathfrak{F}(f) = h$$

d'inconnue $f \in E$.

11. c. Démontrer que cette équation admet une seule solution.

12. On considère un réel $\lambda \neq 0$. On suppose d'une part que λ est une valeur propre de l'opérateur $\mathfrak{F}$ et d'autre part que la dimension du sous-espace propre associé à λ est infinie.

12. a. Démontrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\operatorname{Ker}(\mathfrak{F} - \lambda I_E)$ telle que

$$\forall\, (m, n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \langle\, f_m \mid f_n \,\rangle = \delta_{m,n}.$$

12. b. En appliquant l'inégalité de Bessel aux fonctions k_x définies dans le préambule, démontrer que

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0, \pi], \quad \lambda^2 \sum_{n=0}^{N} \left|f_n(x)\right|^2 \leqslant \int_0^{\pi} K^2(x, y)\, dy.$$

12. c. Établir une contradiction et conclure.

Partie B.

Dans cette partie, on suppose qu'il existe une application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall\, 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \qquad K(x, y) = u(x - y) - u(x + y)$$

et une série absolument convergente $\sum a_n$ *telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt.$$

13. Démontrer que la fonction u est paire et continue sur $\mathbb{R}$ et que K est symétrique.

On admettra *que les hypothèses faites sur* K *dans le préambule sont bien satisfaites.*

14. Démontrer que

$$\forall\, 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \quad K(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx\ \sin ny.$$

15. En déduire que, pour toute application $f \in E$,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \mathfrak{F}(f)(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \int_0^{\pi} f(y) \sin ny\, dy.$$

On notera

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{\pi} f(y) \sin ny\, dy$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

16. Soit λ, une valeur propre non nulle de $\mathfrak{F}$. Il existe donc une application $f \in E$, non identiquement nulle, telle que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \mathfrak{F}(f)(x) = \lambda\, f(x).$$

16. a. Démontrer qu'il existe au moins un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\widehat{f}(p) \neq 0$.

16. b. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$s_p = [t \mapsto \sin pt]$$

est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$. Quelle est la valeur propre associée à ce vecteur propre ?

16. c. Démontrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda\, \widehat{f}(p) = \pi a_p \widehat{f}(p).$$

16. d. Quel est l'ensemble des valeurs propres non nulles de $\mathfrak{F}$?

Dans la fin du problème, on suppose que

$$\forall\, x \in [0, 2\pi], \quad u(x) = x(x - 2\pi)$$

et on admet *que cette hypothèse est compatible avec les hypothèses faites au début de la deuxième partie.*

17. Tracer le graphe de u sur $[-\pi, 2\pi]$.

18. Soit $f \in E$. Vérifier que

$$\mathfrak{F}(f)(x) = 4(\pi - x) \int_0^{x} y f(y)\, dy + 4x \int_x^{\pi} (\pi - y) f(y)\, dy$$

pour tout $x \in [0, \pi]$ et calculer $\mathfrak{F}(f)(0)$ et $\mathfrak{F}(f)(\pi)$.

19. Déduire de la question précédente que $\mathfrak{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad [\mathfrak{F}(f)]''(x) = -4\pi f(x).$$

20. En déduire que 0 n'est pas valeur propre de $\mathfrak{F}$.

21. On suppose que $f \in E$ est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \pi]$, que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \lambda f''(x) + 4\pi f(x) = 0$$

et que

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

22. Étudier la réciproque.

23. En déduire le spectre de $\mathfrak{F}$.

Solution ❀ Intégrale de Fredholm

Partie A.

1. Toute fonction continue sur un segment est bornée, donc la borne supérieure $\|f\|_\infty$ est bien définie (dans $\mathbb{R}$) pour tout $f \in E$. On a ainsi défini une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

On vérifie (sans peine) que $\|\cdot\|_\infty$ sépare les points, puis (éventuellement en omettant quelques détails pénibles) qu'elle est positivement homogène.

Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire, en suivant la méthode habituelle : comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, x \in [0,\pi], \quad \big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|+\big|g(x)\big| \leqslant \|f\|_\infty+\|g\|_\infty.$$

Ayant trouvé un majorant indépendant de x, on peut passer au sup :

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

2. Le produit fg est une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$, donc $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair, d'après les propriétés de l'intégrale, que cette application est bilinéaire et symétrique.

Pour tout $f \in E$, la fonction $\big[t \mapsto f^2(t)\big]$ est positive, donc $\langle\, f\,|\,f\,\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

De plus, la fonction $\big[t \mapsto f^2(t)\big]$ est continue. Par conséquent, si $\langle\, f\,|\,f\,\rangle = 0$, alors $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$, ce qui prouve que f est le vecteur nul de E.

Ainsi, $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

❧ L'application $\|\cdot\|_2$ est donc aussi une norme (la norme associée au produit scalaire $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$).

3. a. Soit $f \in E$. On sait que

$$\forall\, t \in [0,\pi], \quad 0 \leqslant f^2(t) \leqslant \|f\|_\infty^2.$$

On en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^\pi f^2(t)\,dt \leqslant \pi\|f\|_\infty^2$$

et donc que

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\,\|f\|_\infty.$$

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $\|f_n\|_\infty = \pi^n$ et que

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^\pi t^{2n}\,dt = \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}$$

donc

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{\pi}}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Il n'existe donc pas de constante K_2 telle que

$$\forall\, f \neq 0_E, \quad \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2} \leqslant K_2.$$

4. Nous allons appliquer le théorème de continuité des intégrales en fonction d'un paramètre.

Pour tout $x \in J = [0,\pi]$, l'application

$$[y \mapsto |K(x,y)|]$$

est continue sur le segment $I = [0,\pi]$, donc intégrable sur $I = [0,\pi]$.

Pour tout $y \in I = [0,\pi]$, l'application

$$[x \mapsto |K(x,y)|]$$

est continue sur $J = [0,\pi]$.

D'après le préambule, il existe une constante M telle que

$$\forall\, (x,y) \in J \times I, \quad \big|K(x,y)\big| \leqslant M$$

et la fonction $[y \mapsto M]$ est évidemment intégrable sur le segment $I = [0,\pi]$.

Par conséquent, la fonction Φ est bien continue sur l'intervalle $J = [0,\pi]$.

5. Pour tout $x \in [0,\pi]$, l'application

$$[y \mapsto K(x,y)f(y)]$$

est continue sur le segment $[0,\pi]$ (en tant que produit de fonctions continues), donc elle est intégrable sur cet intervalle. L'application $\mathfrak{F}(f)$ est donc bien définie.

❧ De plus, pour tout $y \in [0,\pi]$, l'application

$$[x \mapsto K(x,y)f(y)]$$

est continue sur $[0,\pi]$ et, de même qu'à la question précédente,

$$\forall\, (x,y) \in [0,\pi]\times[0,\pi], \quad \big|K(x,y)f(y)\big| \leqslant M.\|f\|_\infty.$$

Le majorant est indépendant de y et intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

Comme précédemment, on en déduit que l'application $\mathfrak{F}(f)$ est bien continue sur $[0,\pi]$.

❧ Cela prouve que $\mathfrak{F}$ est une application de E dans E.

Par linéarité de l'intégrale, il est alors clair que $\mathfrak{F}$ est une application linéaire de E dans E.

6. En reprenant l'inégalité de domination trouvée à la question précédente,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0,\pi], \quad \mathfrak{F}(f)(x) &= \left|\int_0^\pi K(x,y)f(y)\,dy\right| \\ &\leqslant \int_0^\pi \big|K(x,y)f(y)\big|\,dy \\ &\leqslant \pi.M.\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Comme le majorant trouvé est indépendant de x, on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|\mathfrak{F}(f)\big\|_\infty \leqslant M.\pi.\|f\|_\infty.$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de $\mathfrak{F}$. Il existe donc une application $f \in E$, non identiquement nulle, telle que

$$\mathfrak{F}(f) = \lambda \cdot f.$$

Par homogénéité de la norme, on déduit de **[6.]** que

$$|\lambda|\,\|f\|_\infty = \big\|\mathfrak{F}(f)\big\|_\infty \leqslant A.\|f\|_\infty.$$

Comme $f \neq 0_E$, alors $\|f\|_\infty > 0$ et par conséquent

$$|\lambda| \leqslant A.$$

Cela prouve que le spectre (réel) de $\mathfrak{F}$ est contenu dans le segment $[-A, A]$: il est donc borné.

8. Avec les notations du préambule,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \mathfrak{F}(f)(x) = \langle\, k_x \,|\, f \,\rangle\,.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad 0 \leqslant \left|\mathfrak{F}(f)(x)\right| \leqslant \|k_x\|_2 \cdot \|f\|_2.$$

Or $0 \leqslant K(x, y)^2 \leqslant M^2$ pour tout $(x, y) \in [0, \pi]^2$, donc

$$\|k_x\|_2 \leqslant \sqrt{\pi} \cdot M$$

et donc

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad 0 \leqslant \left|\mathfrak{F}(f)(x)\right| \leqslant \sqrt{\pi} \cdot M \cdot \|f\|_2.$$

❧ On peut élever au carré cet encadrement (les quantités sont positives) et intégrer sur $[0, \pi]$. On en déduit que

$$0 \leqslant \left\|\mathfrak{F}(f)\right\|_2^2 \leqslant \pi^2 \cdot M^2 \cdot \|f\|_2^2$$

et donc que

$$\left\|\mathfrak{F}(f)\right\|_2 \leqslant \pi \cdot M \cdot \|f\|_2.$$

9. Soient λ et μ, deux valeurs propres *distinctes* de $\mathfrak{F}$. On considère deux vecteurs propres f et g, respectivement associés aux valeurs propres λ et μ. Alors, par bilinéarité du produit scalaire et par symétrie de $\mathfrak{F}$,

$$\lambda \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \left\langle\, \mathfrak{F}(f) \,\middle|\, g \,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, \mathfrak{F}(g) \,\right\rangle = \mu \langle\, f \,|\, g \,\rangle\,.$$

On en déduit que

$$(\lambda - \mu) \cdot \langle\, f \,|\, g \,\rangle = 0$$

et comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que les sous-espaces propres de $\mathfrak{F}$ sont deux à deux orthogonaux.

10. D'après **[4.]**, l'application Φ est continue sur le segment $[0, \pi]$. Elle est donc bornée et, en particulier, elle atteint son maximum.

Il est clair que ce maximum est positif.

Si ce maximum était nul, alors on aurait

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \int_0^\pi \left|K(x, y)\right| dy = 0.$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi]$, la fonction intégrande

$$\left[y \mapsto \left|K(x, y)\right|\right]$$

est continue et positive. Si l'intégrale était nulle, on en déduirait que

$$\forall\, x \in [0, \pi],\ \forall\, y \in [0, \pi], \quad \left|K(x, y)\right| = 0.$$

Mais, d'après le préambule, l'application K n'est pas identiquement nulle. C'est donc absurde et le maximum de Φ est donc strictement positif.

Son inverse Ω est donc bien défini : c'est un réel strictement positif.

11. a. On reprend le calcul du **[6.]** en étant plus précis.

Comme la fonction f est bornée,

$$\forall\, 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \quad \left|K(x, y)f(y)\right| \leqslant \left|K(x, y)\right| \|f\|_\infty.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, pour tout réel $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{F}(f)(x)\right| &\leqslant \int_0^\pi \left|K(x, y)f(y)\right| \\ &\leqslant \left(\int_0^\pi \left|K(x, y)\right| dy\right) \|f\|_\infty \qquad \text{(positivité de } \textstyle\int\text{)} \\ &\leqslant \frac{1}{\Omega} \|f\|_\infty. \qquad \text{(le max est un majorant)} \end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant de x, on peut passer à la borne supérieure :

$$\left\|\mathfrak{F}(f)\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\Omega} \|f\|_\infty.$$

❧ Par récurrence, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\|\mathfrak{F}^n(f)\right\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{\Omega}\right)^n \|f\|_\infty$$

et on constate que cette propriété est également vérifiée pour $n = 0$.

❧ Par homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left\|\lambda^n \mathfrak{F}^n(f)\right\|_\infty \leqslant \left(\frac{|\lambda|}{\Omega}\right)^n \|f\|_\infty$$

et comme $|\lambda|/\Omega < 1$, on en déduit que la série de fonctions $\sum \lambda^n \mathfrak{F}^n(f)$ converge normalement sur $[0, \pi]$. La somme S est donc bien définie sur $[0, \pi]$.

Comme toutes les fonctions $\mathfrak{F}^n(f)$ sont continues sur $[0, \pi]$ (en tant que vecteurs de E), on en déduit que la somme S est continue sur $[0, \pi]$.

11. b. D'après la question précédente, on a bien $S \in E$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| S - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mathfrak{F}^k(h) \right\|_\infty = 0.$$

Or $\mathfrak{F}$ est linéaire et, d'après **[6.]**,

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}(S) - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mathfrak{F}^{k+1}(h) \right\|_\infty &= \left\| \mathfrak{F}\Big(S - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mathfrak{F}^k(h)\Big) \right\|_\infty \\ &\leqslant A \cdot \left\| S - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mathfrak{F}^k(h) \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\mathfrak{F}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \mathfrak{F}^{k+1}(h).$$

Par conséquent,

$$\lambda \mathfrak{F}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{k+1} \mathfrak{F}^{k+1}(h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k \mathfrak{F}^k(h),$$

ce qui prouve que

$$S - \lambda \mathfrak{F}(S) = \lambda^0 \mathfrak{F}^0(h) = h.$$

La fonction S est donc bien une solution de l'équation étudiée.

11. c. Comme il s'agit d'une équation linéaire, la solution $f = S$ est unique si, et seulement si, l'équation homogène

$$g - \lambda\mathfrak{F}(g) = 0_E$$

admet l'application nulle pour seule solution (principe de superposition).

Supposons donc qu'il existe une application $g \neq 0_E$ telle que

$$g = \lambda\mathfrak{F}(g).$$

Par homogénéité de la norme et comme $g \neq 0_E$,

$$0 < \|g\|_\infty = |\lambda| \, \|\mathfrak{F}(g)\|_\infty.$$

Mais on a vu en **[11.a.]** que $\|\mathfrak{F}(g)\|_\infty \leqslant \Omega^{-1} \cdot \|g\|_\infty$, donc

$$0 < \|g\|_\infty \leqslant \frac{|\lambda|}{\Omega} \|g\|_\infty.$$

Comme $|\lambda| < \Omega$ par hypothèse, c'est absurde !

L'équation du **[11.b.]** admet donc $f = S$ comme seule solution.

12. a. Comme on suppose que la dimension du sous-espace $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F} - \lambda I_E)$ est infinie, il existe une famille libre dénombrable $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce sous-espace.

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée de vecteurs de $\mathrm{Ker}(\mathfrak{F} - \lambda I_E)$.

12. b. Fixons $x \in [0, \pi]$.

La fonction k_x appartient à E (d'après le préambule, elle est bien continue sur $[0, \pi]$). Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, on déduit de l'inégalité de Bessel que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \langle\, k_x \,|\, f_n \,\rangle^2 \leqslant \|k_x\|_2^2.$$

Par définition du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\langle\, k_x \,|\, f_n \,\rangle &= \int_0^\pi f_n(y)K(x, y)\, dy \\ &= \mathfrak{F}(f_n)(x) = \lambda \cdot f_n(x)\end{aligned}$$

puisque les fonctions f_n appartiennent au sous-espace propre de $\mathfrak{F}$ associé à la valeur propre λ.

D'autre part,

$$\|k_x\|_2^2 = \int_0^\pi K^2(x, y)\, dy,$$

donc on a bien

$$\lambda^2 \sum_{n=0}^{N} \left|f_n(x)\right|^2 \leqslant \int_0^\pi K^2(x, y)\, dy$$

pour tout réel $x \in [0, \pi]$ et tout entier $N \in \mathbb{N}$.

12. c. D'après **[4.]**, l'application

$$\left[x \mapsto \int_0^\pi K^2(x, y)\, dy\right]$$

est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc intégrable sur ce segment. Nous noterons C, la constante réelle ainsi obtenue :

$$C = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi K^2(x, y)\, dy\right) dx.$$

D'autre part, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \lambda^2 \sum_{n=0}^{N} \left|f_n(x)\right|^2 dx &= \lambda^2 \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_2^2 \\ &= \lambda^2 \cdot (N + 1)\end{aligned}$$

puisque, par construction, les fonctions f_n sont des vecteurs unitaires pour $\|\cdot\|_2$.

On déduit de l'inégalité du **[12.b.]** que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \lambda^2 \cdot (N + 1) \leqslant C,$$

ce qui est impossible, puisque $\lambda \neq 0$.

❧ Par conséquent, le sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est nécessairement un sous-espace de dimension finie.

Partie B.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$v_n = [t \mapsto a_n \cos nt]$$

est paire et continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|v_n(t)\right| \leqslant |a_n|.$$

Or la série $\sum a_n$ converge absolument par hypothèse, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La convergence normale conserve la continuité et la convergence simple conserve la parité, donc la somme u est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

❧ Chaque fonction v_n est paire, donc u est paire (la parité est conservée par convergence simple).

Par définition de K, quels que soient x et y, par parité de u,

$$\begin{aligned}K(y, x) &= u(y - x) - u(y + x) \\ &= u(x - y) - u(x + y) = K(x, y)\end{aligned}$$

donc K est bien symétrique.

14. Par définition de K et de u,

$$\begin{aligned}K(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n(x - y) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n(x + y) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n[\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny] \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n[\cos nx \cos ny - \sin nx \sin ny].\end{aligned}$$

Comme la série $\sum a_n$ est absolument convergente par hypothèse, les quatre séries sont convergentes, ce qui permet de simplifier l'expression précédente :

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \sin nx \sin ny.$$

15. Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les applications

$$\varphi_n = [y \mapsto 2a_n \sin nx \cdot f(y) \cdot \sin ny]$$

sont continues sur le segment $[0, \pi]$ et donc intégrables sur cet intervalle.

De plus, la fonction $f \in E$ est bornée (continue sur le segment $[0, \pi]$), donc

$$\forall\, y \in [0, \pi], \quad \left|\varphi_n(y)\right| \leqslant 2|a_n| \cdot 1 \cdot \|f\|_\infty \cdot 1$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty \cdot |a_n|.$$

Comme la série $\sum a_n$ est absolument convergente, on en déduit que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(f)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi 2a_n \sin nx \cdot f(y) \cdot \sin ny \, dy \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \widehat{f}(n) \sin nx\end{aligned}$$

pour tout $x \in [0, \pi]$.

16. a. D'après **[15.]**, si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \mathfrak{F}(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \widehat{f}(n) \sin nx = 0.$$

Or f est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à une valeur propre non nulle, donc

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad f(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{F}(f)(x) = 0,$$

ce qui est contradictoire. Il existe donc au moins un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\widehat{f}(p) \neq 0$.

16. b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction s_p appartient à E et n'est pas identiquement nulle.

De plus, pour tout $n \neq p$, on a $n - p \neq 0$ et $n + p \geqslant 1$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 2s_p(y) \sin ny \, dy &= \int_0^\pi \cos(p+n)y + \cos(p-n)y \, dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même, pour $n = p$,

$$\int_0^\pi 2s_p(y) \sin py \, dy = \int_0^\pi 1 + \cos 2py \, dy = \pi$$

puisque $2p \neq 0$.

❧ On déduit alors de **[15.]** que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad \mathfrak{F}(s_p)(x) = \pi a_p \sin px,$$

ce qui prouve que s_p est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à la valeur propre πa_p.

16. c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Comme f est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à λ,

$$\lambda\, \widehat{f}(p) = \int_0^\pi \mathfrak{F}(f)(x) \sin px \, dx$$

et, d'après **[15.]**,

$$\mathfrak{F}(f)(x) \sin px = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \widehat{f}(n) \sin nx \sin px.$$

Comme f est bornée,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0, \pi], \quad \left|2a_n \widehat{f}(n) \sin nx \sin px\right| &\leqslant 2|a_n| \left|\widehat{f}(n)\right| \\ &\leqslant 2\pi|a_n| \, \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

La série de fonctions est donc normalement convergente sur le segment $[0, \pi]$, ce qui nous permet d'intégrer terme à terme. On en déduit que

$$\int_0^\pi \mathfrak{F}(f)(x) \sin px \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \widehat{f}(n) \int_0^\pi 2 \sin nx \sin px \, dx$$

et, d'après les calculs menés à la question précédente, il reste seulement

$$\int_0^\pi \mathfrak{F}(f)(x) \sin px \, dx = \pi a_p \widehat{f}(p).$$

16. d. Si λ est une valeur propre non nulle de $\mathfrak{F}$, alors **[16.a.]** il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\widehat{f}(p) \neq 0$ et $\lambda = \pi a_p$ d'après **[16.b.]**.

D'après **[16.c.]**, la réciproque est vraie : pour tout entier $p \geqslant 1$, le réel πa_p est une valeur propre de $\mathfrak{F}$.

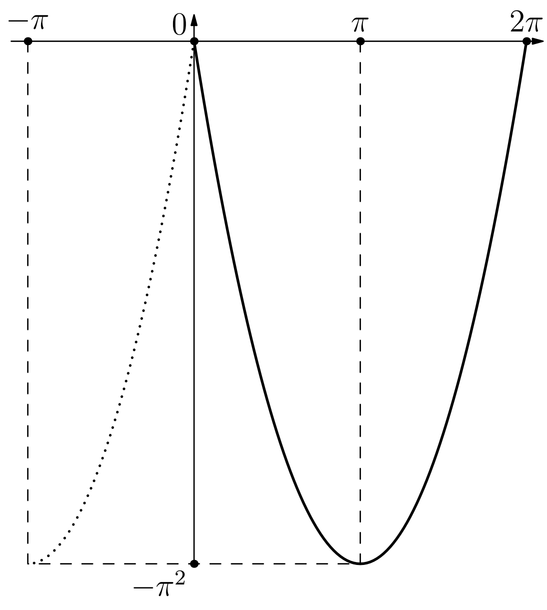
L'ensemble des valeurs propres non nulles de $\mathfrak{F}$ est donc

$$\left\{\pi a_p,\ p \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

REMARQUE.— Comme la série $\sum a_p$ est convergente, son terme général tend vers 0, donc la suite $(a_p)_{p \geqslant 1}$ est bornée, ce qui confirme le résultat de **[7.]**.

17. D'après **[13.]**, la fonction u est paire : il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$ et de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées).

Restreinte à $[0, 2\pi]$, la fonction u est polynomiale de degré 2, donc son graphe est une parabole. Elle admet $x = 0$ et $x = 2\pi$ pour racines (et donc $x = \pi$ pour sommet).



REMARQUE.— On constate que la fonction u est bien continue, mais elle n'est pas dérivable en 0. (On aurait pu remarquer au **[13.]** que u était 2π-périodique.)

18. D'après **[13.]**, la fonction u est paire, donc

$$\forall\, x \in [-2\pi, 2\pi], \quad u(x) = x^2 - 2\pi\,|x|.$$

Pour $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$, on a

$$-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi.$$

On en déduit que

$$K(x, y) = -4xy + 2\pi\big[|x+y| - |x-y|\big]$$

et donc que :

— si $x \geqslant y$, alors
$$K(x, y) = -4xy + 4\pi y = 4y(\pi - x),$$

— si $x \leqslant y$, alors
$$K(x, y) = -4xy + 4\pi x = 4x(\pi - y).$$

L'expression de $\mathfrak{F}(f)(x)$ découle alors immédiatement de la relation de Chasles.

❧ Il est alors clair que

$$\mathfrak{F}(f)(0) = \mathfrak{F}(f)(\pi) = 0.$$

19. Les fonctions

$$[y \mapsto yf(y)] \quad \text{et} \quad [y \mapsto (\pi - y)f(y)]$$

sont continues sur l'intervalle $[0, \pi]$. D'après le Théorème fondamental et l'expression **[18.]** de $\mathfrak{F}(f)$, l'application $\mathfrak{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned}[\mathfrak{F}(f)]'(x) &= -4\int_0^x yf(y)\,dy + 4(\pi - x)xf(x) \\ &\quad + 4\int_x^\pi (\pi - y)f(y)\,dy - 4x(\pi - x)f(x) \\ &= -4\int_0^x yf(y)\,dy + 4\int_x^\pi (\pi - y)f(y)\,dy.\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau le Théorème fondamental, la fonction $[\mathfrak{F}(f)]'$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $\mathfrak{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, \pi]$, et de plus

$$\begin{aligned}\forall\, x \in [0, \pi], \quad [\mathfrak{F}(f)]''(x) &= -4xf(x) - 4(\pi - x)f(x) \\ &= -4\pi f(x).\end{aligned}$$

20. Si 0 était valeur propre de $\mathfrak{F}$, alors il existerait une application $f \in E$ non nulle telle que $\mathfrak{F}(f) = 0_E$. D'après la question précédente, on aurait alors

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad 0 = -4\pi f(x)$$

ce qui contredirait l'hypothèse $f \neq 0_E$.

Par conséquent, $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathfrak{F})$.

21. D'après **[19.]**, si $f \in E$ est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors

$$f = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{F}(f)$$

donc $f(0) = f(\pi) = 0$ d'après **[18.]** et, d'après **[19.]**, f est de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad f''(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot [\mathfrak{F}(f)]''(x) = \frac{-4\pi}{\lambda} \cdot f(x).$$

22. Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \lambda f''(x) = -4\pi f(x).$$

Alors, d'après **[19.]**,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \lambda f''(x) = [\mathfrak{F}(f)]''(x),$$

ce qui prouve que la différence $\mathfrak{F}(f) - \lambda f$ est une fonction affine sur le segment $[0, \pi]$.

Or $\mathfrak{F}(f)(0) = \mathfrak{F}(f)(\pi) = 0$ d'après **[18.]**. Si on suppose aussi que $f(0) = f(\pi) = 0$, alors la fonction $\mathfrak{F}(f) - \lambda f$ est affine, nulle en $x = 0$ et nulle en $x = \pi$: cette fonction est donc identiquement nulle, donc

$$\mathfrak{F}(f) = \lambda f.$$

❧ En conclusion, la fonction $f \in E$ est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associée à la valeur propre $\lambda \neq 0$ si, et seulement si, c'est une solution *non nulle* de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in [0, \pi], \qquad \lambda f''(x) = -4\pi f(x)$$

qui vérifie en outre la condition aux limites :

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

23. D'après **[20.]**, le réel 0 n'est pas valeur propre de $\mathfrak{F}$.

❧ Soit $\lambda < 0$, une valeur propre de $\mathfrak{F}$. Un vecteur propre f associé à λ est alors solution de l'équation différentielle

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

avec $\omega^2 = {}^{4\pi}\!/_{|\lambda|} > 0$. Donc il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad f(x) = a \operatorname{ch} \omega x + b \operatorname{sh} \omega x.$$

D'après **[18.]**, il faut que $f(0) = f(\pi) = 0$, donc $a = 0$ et $b = 0$: la fonction f est identiquement nulle, ce qui est impossible : il n'existe donc pas de valeur propre strictement négative.

❧ Soit $\lambda > 0$, une valeur propre de $\mathfrak{F}$. En raisonnant de même, on constate qu'un vecteur propre $f \in E$ associé à λ s'exprime sous la forme

$$f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$$

avec, pour cette fois, $\omega^2 = {}^{4\pi}\!/_{\lambda}$.

Les conditions $f(0) = f(\pi) = 0$ imposent $a = 0$ et

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega\pi = n\pi$$

c'est-à-dire

$$\exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda = \frac{4\pi}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sin nx.$$

Ce réel λ est donc bien une valeur propre de $\mathfrak{F}$ et la fonction s_n est un vecteur propre de $\mathfrak{F}$ associé à λ.

❧ Par conséquent, le spectre de $\mathfrak{F}$ est l'ensemble dénombrable

$$\Big\{\frac{4\pi}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\Big\}.$$

REMARQUE.— En comparant avec **[16.b.]**, on arrive à la conclusion que, nécessairement,

$$\forall\, p \geqslant 1, \quad a_p = \frac{\pi}{p^2}$$

mais il n'est pas simple de démontrer que, en effet,

$$\forall\, x \in [0, 2\pi], \quad x(x - 2\pi) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\pi}{p^2} \cos px.$$