Espaces euclidiens [70]

Rappel sur la notation utilisée

On rappelle que le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on le calcule : on note donc en général

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ Si on considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est une matrice inversible :

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$$

et les matrices

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \quad \text{et} \quad A' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n)$$

sont liées par la relation

$$A' = P^{-1}A$$

de telle sorte que

$$\det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n) = \det A' = \frac{\det A}{\det P} = \frac{1}{\det P} \cdot \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ Lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées directes, la matrice de passage P est une matrice de rotation et son déterminant est égal à 1, si bien que dans ce cas particulier

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n).$$

On convient de noter Det, le déterminant relatif à une base orthonormée directe quelconque.

Inégalité d'Hadamard

❧ Si la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée, alors le déterminant est nul et l'inégalité est évidente.

❧ Si la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée, alors le déterminant est égal à ± 1 (selon l'orientation de cette base) et comme chaque norme est égale à 1, l'inégalité est évidente : c'est même une égalité.

❧ Il reste donc le cas où la famille

$$\mathscr{B} = (u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

est une base non orthonormée de E.

L'algorithme de Gram - Schmidt permet de construire de proche en proche une base orthonormée

$$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

Selon l'orientation de la BON $\mathscr{B}_0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(u_1, \dots, u_n) &= \pm \det_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm \det\big(\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})\big).\end{aligned}$$

Or, d'après l'algorithme de Gram-Schmidt, la matrice de passage

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est triangulaire (supérieure), donc son déterminant est égal au produit de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Det}(u_1, \dots, u_n) = \pm \prod_{k=1}^{n} p_{k,k}.$$

Si les coordonnées du vecteur u relatives à la BON $\mathscr{B}_0$ sont $(X_1, \dots, X_n)$, alors

$$u = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \varepsilon_k$$

et d'après le Théorème de Pythagore,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

En particulier,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad X_k^2 \leqslant \|u\|^2$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad |X_k| \leqslant \|u\|.$$

En appliquant ce raisonnement à chaque colonne de la matrice de passage,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |p_{k,k}| \leqslant \|u_k\|$$

et par conséquent

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |p_{k,k}|.$$