24
Étude locale des fonctions

1. On étudie ici des fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$. On énonce sous une forme assez abstraite (voisinages, fermés, compacts...) des résultats qui généralisent des résultats bien connus pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (où on parle d'intervalles, d'inégalités larges, de segments).

2. Cette étude se distingue des chapitres précédents par le fait que la notion de **limite** se substitue à la notion de **continuité**. Le problème principal sera de justifier l'existence d'une limite, ce qui revient à étudier l'existence d'un **prolongement par continuité**.

I
Topologie relative à une partie

3. La topologie d'un espace vectoriel E permet de définir la continuité d'applications définies sur E.
Pour étudier une fonction qui n'est définie que sur une *partie* A de E, partie qui n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E, il faut définir une topologie sur A qui soit cohérente avec la topologie de E.
La notion de **topologie relative à une partie** nous permettra d'étendre les notions de **limite** et de **continuité** aux fonctions qui ne sont définies que sur une partie d'un espace vectoriel.

4. ✍ *Soit A, une partie de E.*
4.1 *Une partie $V \subset A$ est un **voisinage de x_0 relatif à** A lorsqu'il existe un voisinage W de x_0 tel que*

$$V = A \cap W.$$

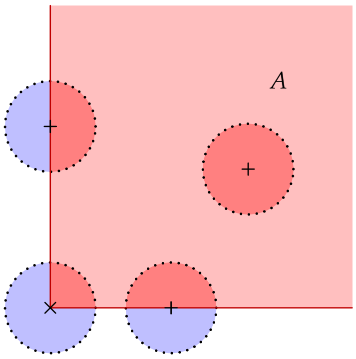
4.2 *Une partie $U \subset A$ est un **ouvert relatif à** A lorsqu'il existe un ouvert U_0 de E tel que*

$$U = A \cap U_0.$$

4.3 *Une partie $F \subset A$ est un **fermé relatif à** A lorsqu'il existe un fermé F_0 de E tel que*

$$F = A \cap F_0.$$

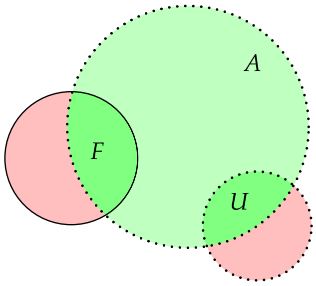
5. Les ouverts relatifs à une partie A ont les mêmes propriétés que les ouverts de E. →[**22.22**]
5.1 Une partie U de A est un ouvert relatif à A si, et seulement si, U est un voisinage relatif à A de chacun de ses points.
5.2 En particulier, A est un voisinage relatif à A de chacun de ses points (même si A n'est pas un ouvert).

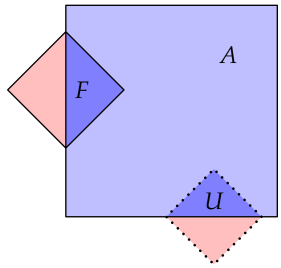


5.3 L'union d'une famille quelconque d'ouverts relatifs à A est un ouvert relatif à A.
5.4 L'intersection d'une famille finie d'ouverts relatifs à A est un ouvert relatif à A.
5.5 Une partie F de A est un fermé relatif à A si, et seulement si, son complémentaire *dans* A, soit $F^c \cap A$, est un ouvert relatif à A.

6. Les fermés relatifs à une partie A ont les mêmes propriétés que les fermés de E. →[**22.23**]
6.1 L'intersection d'une famille quelconque de fermés relatifs à A est un fermé relatif à A.
6.2 L'union d'une famille finie de fermés relatifs à A est un fermé relatif à A.
6.3 ➙ **Caractérisation séquentielle des fermés**
Une partie F de A est un fermé relatif à A si, et seulement si : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un élément ℓ qui appartient à A, la limite ℓ appartient encore à F.

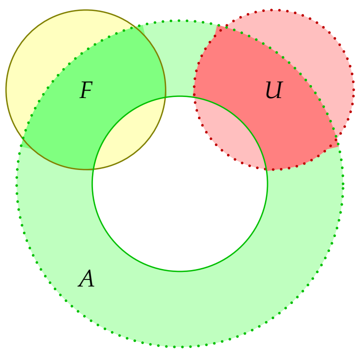
7. Si A est un ouvert de E, alors tout ouvert U relatif à A est un ouvert de E, mais un fermé F relatif à A n'est pas nécessairement un fermé de E.





De même, si A est un fermé de E, alors tout fermé F relatif à A est un fermé de E, mais un ouvert U relatif à A n'est pas nécessairement un ouvert de E.

8. Si A n'est ni ouvert, ni fermé, les ouverts relatifs à A ne sont pas nécessairement des ouverts de E et les fermés relatifs à A ne sont pas nécessairement des fermés de A.



Entraînement

9. **Questions pour réfléchir**
1. Décrire les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des ouverts relatifs à A (resp. des fermés relatifs à A) dans chacun des cas suivants : $A = [0, +\infty[$, $A =]0, 1[$, $A = [-1, 1]$.
2. Un ouvert relatif à A est-il un ouvert de E ? Et si A est un ouvert de E ?
3. Un fermé relatif à A est-il un fermé de E ? Et si A est un fermé de E ?
4. On considère $\mathbb{N}$ comme une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie de $\mathbb{N}$ est à la fois un ouvert et un fermé relatif à $\mathbb{N}$.
5. Si K est un compact de E et si F est un fermé relatif à K, la partie F est un compact de E.
6. Si K_0 est un compact de E, la partie $K = A \cap K_0$ est-elle un compact de E contenu dans A ?

10. Soit

$$V = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A^t AA = A\}.$$

10.1 Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V.
10.2 Que dire des matrices inversibles $A \in V$?
10.3 Le groupe orthogonal est ouvert et fermé pour la topologie relative à V.

II

Limite

11. On note $\mathscr{V}_E(x_0)$, l'ensemble des voisinages de x_0 dans E et $\mathscr{V}_A(x_0)$, l'ensemble des voisinages de x_0 relatifs à A.
11.1 ✍ *Soient $f : A \to F$ et $x_0 \in \overline{A}$. La fonction f **tend vers** $\ell \in F$ **au voisinage de** x_0 lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in A,\quad \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

11.2 La fonction $f : A \to F$ tend vers ℓ au voisinage de x_0 si, et seulement si, la fonction

$$\Big[h \mapsto \|f(x_0 + h) - \ell\|_F\Big]$$

tend vers 0 lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0 en vérifiant $x_0 + h \in A$.
11.3 Si la fonction f tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 au voisinage de x_0, alors $\ell_1 = \ell_2$.
11.4 ✍ *Si f tend vers $\ell \in F$ au voisinage de x_0, on dit que ℓ est **la limite** de f au voisinage de x_0. On note*

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\mathscr{V}_A(x_0)} f.$$

12. Utilisation des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$
Toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes entre elles [**23.36**] : la norme euclidienne canonique est aussi bonne qu'une autre et a l'avantage d'apparaître naturellement quand on utilise les coordonnées polaires.
12.1 ➙ *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tend vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0) si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varphi :]0, \alpha[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que*

$$\forall\, (r, \theta) \in]0, \alpha[\times \mathbb{R},\quad \big|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \ell\big| \leqslant \varphi(r).$$

12.2 Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\qquad \frac{2x^3+3y^3}{2x^2+y^2},\qquad \frac{xy^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

tendent vers 0 au voisinage de $(0,0)$.
12.3 Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2},\qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0,0)$.

13. Composition de limites
13.1 ➙ *On considère trois espaces vectoriels normés E, F et G ; deux fonctions*

$$f : A \to F \quad \text{et} \quad g : B \to G$$

où $A \subset E$ et $B \subset F$ en supposant que $f_*(A) \subset B$.
Si f tend vers y_0 au voisinage de x_0 et si g tend vers z_0 au voisinage de y_0, alors $(g \circ f)$ tend vers z_0 au voisinage de x_0.
13.2 Le théorème de composition des limites peut être utilisé négativement pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point donné.

1. On considère l'application g définie par $g(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0),\quad g(x,y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^6}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto g(x, \alpha x)]$ est continue mais la fonction $[x \mapsto g(x, x^2)]$ n'est pas continue en $x = 0$, donc la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Les expressions

$$\frac{y}{x^2+(y-x^2)^2},\qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2}\qquad \text{et}\qquad \frac{xy}{x-y}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

14. Caractérisation séquentielle
Le théorème de composition des limites [**13**] peut être formulé en termes de suites.
14.1 ➙ *On suppose que $f : A \to F$ tend vers b au voisinage de a. Quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers b.*
14.2 ➙ *S'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tendent vers a telles que les suites*

$$\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne tendent pas vers la même limite, alors f n'a pas de limite en a.
14.3 Réciproquement, on peut démontrer l'existence d'une limite en ne considérant que des suites. →[**9.5.3**]
14.4 ➙ *On suppose que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ pour* toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0. Alors f tend vers ℓ au voisinage de x_0.*
14.5 ➙ *Soit $x_0 \in E$, un point adhérent à A.*
La fonction $f : A \to F$ admet une limite $\ell \in F$ au voisinage de x_0 si, et seulement si, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0.* →[**3.23.2**]

15. Limite selon une partie
Soient $f : A \to F$, $P \subset A$ et x_0, un point adhérent à P.
15.1 ✍ *La fonction f admet une **limite en** x_0 **selon** P lorsque la restriction $f_{|P}$ admet une limite en x_0, qui est alors notée*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in P}} f(x).$$

15.2 Si $f : A \to F$ admet une limite en x_0, alors f admet une limite en x_0 selon P et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in P}} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

15.3 La fonction f admet une limite en x_0 selon P si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

16. Limites latérales
On revient au cas d'une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ pour reformuler des notions familières en termes abstraits.
16.1 ✍ *Soit x_0, un point adhérent à $I \subset \mathbb{R}$.*
*La fonction f admet une **limite à gauche** en x_0, notée $f(x_0-)$, lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]-\infty, x_0[$.*
*La fonction f admet une **limite à droite** en x_0, notée $f(x_0+)$, lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]x_0, +\infty[$.*
16.2 ✍ *Soit $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$.*
*Une fonction définie sur I est **continue à gauche** en x_0 lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]-\infty, x_0]$.*
*Cette fonction est **continue à droite** en x_0 lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap [x_0, +\infty[$.*
16.3 Une fonction $f : [a, b] \to E$ est continue en a (resp. en b) si, et seulement si, elle est continue à droite en a (resp. continue à gauche en b).

Entraînement

17. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* [**11.1**] – Pourquoi suppose-t-on que $x_0 \in \overline{A}$?
2. *Suite de* [**11.1**] – Soit $B = f_*(A) \subset F$, l'image de A par f. La limite ℓ est un point adhérent à B.
3. *Suite de* [**14.1**] – Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? →[**33.4**]
4. *Suite de* [**15**] – Si $P \subset A$ et si x_0 est adhérent à P, alors x_0 est adhérent à A.
5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et g, la restriction de f à $[0, +\infty[$. Comparer la continuité de f en 0 et la continuité de g en 0.
6. On suppose que $P \cup Q = A$ et que x_0 est un point adhérent à P et à Q. Si f admet la même limite en x_0 suivant P et Q, admet-elle une limite en x_0 ?

18. La fonction f définie sur $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = \frac{3x^3 + 2y^3}{x + 2y^2}$$

tend vers 0 au voisinage de $(0,0)$ car il existe un voisinage V de $(0,0)$ relatif à Ω tel que

$$\forall\,(x,y) \in V, \quad \big|f(x,y) - (3x^2 - 6xy^2 + 12y^4)\big| \leqslant 2|y|.$$

19. Caractérisations des fonctions qui admettent une limite
Les propositions suivantes sont équivalentes au fait que la fonction $f : A \to F$ tende vers $\ell \in F$ au voisinage de $x_0 \in A$.

1. $$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0, \quad f_*\big(A \cap B_f(x_0, \eta)\big) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$$
2. $$\forall\,W \in \mathscr{V}_F(\ell),\ \exists\,V \in \mathscr{V}_E(x_0), \quad f_*(A \cap V) \subset W$$
3. $$\forall\,W \in \mathscr{V}_F(\ell), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0).$$

III

Continuité

20. Deux espaces vectoriels normés E et F étant donnés, on considère une fonction f, définie sur une partie A de E, à valeurs dans F.

20.1 Si $x_0 \in A$ et si f tend vers ℓ au voisinage de x_0, alors $\ell = f(x_0)$.

20.2 ✍ **Continuité en un point**
La fonction $f : A \to F$ est ***continue en*** *x_0 lorsque $x_0 \in A$ et qu'elle admet une limite au voisinage de x_0.*

20.3 ✍ **Continuité globale**
Une fonction $f : A \to F$ est ***continue (sur*** *A**)** lorsqu'elle est continue en chaque point $x_0 \in A$.*

20.4 Si la fonction $f : A \to F$ est continue, alors la fonction $\|f\| : A \to \mathbb{R}$ est continue.

III.1 Prolongement par continuité

21. ➙ *Soient $x_0 \notin A$, un point adhérent à A et $A_0 = A \cup \{x_0\}$. Une fonction $f : A \to F$ admet une limite au voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe un prolongement $f_0 : A_0 \to F$ de f qui est continu en x_0. Dans ce cas,*

$$f_0(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

22. Dérivabilité du prolongement
Il ne faut surtout pas confondre la *dérivabilité du prolongement* f_0 (qui est un problème à résoudre) avec l'opération hasardeuse qui consisterait à *prolonger la dérivée de* f, opération dont le résultat risque de ne pas avoir de sens.

Considèrons une fonction dérivable f de $I \subset \mathbb{R}$ dans E et un point x_0 adhérent à I.
Si la fonction f est prolongée en une fonction f_0 continue sur $I_0 = I \cup \{x_0\}$,

- ou bien ce prolongement est dérivable en x_0 et, dans ce cas, la dérivée de f_0 est définie au point x_0 ;
- ou bien ce prolongement n'est pas dérivable en x_0 : dans ce cas, la dérivée de f_0 n'est pas définie au point x_0 et si on cherche à prolonger la dérivée f_0' au point x_0, alors le prolongement qu'on obtiendra ne sera pas la dérivée de f_0.

Le prolongement f_0 est dérivable en x_0 si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0) \cdot a + o(x - x_0)$$

lorsque x est voisin de x_0.

III.2 Fonctions continues sur un compact

23. ➙ *Si $f : K \to F$ est continue et si K est une partie compacte de E, alors $f_*(K)$ est une partie compacte de F.*

24. ➙ *Si K est une partie compacte de E et si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : elle atteint un maximum et un minimum.*

25. ➙ *Si K est une partie compacte de E et si $f : K \to F$ est continue, alors la fonction f est bornée et il existe x_m et x_M dans K tels que*

$$\forall\,x \in K, \quad \big\|f(x_m)\big\| \leqslant \big\|f(x)\big\| \leqslant \big\|f(x_M)\big\|.$$

III.3 Continuité uniforme

26. La fonction $f : A \to F$ est continue en $x_0 \in A$ lorsque

$$\forall\,W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0)$$

et la norme sur E étant invariante par translation, cela revient à

$$\forall\,W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big),\ \exists\,V \in \mathscr{V}_E(0_E), \quad f_*\big(A \cap (x_0 + V)\big) \subset W.$$

L'ordre des quantificateurs indique que le voisinage V dépend *a priori* du point x_0 choisi.

26.1 La fonction f est dite *uniformément continue* lorsque le voisinage V ne dépend pas de $x_0 \in A$, mais seulement du voisinage W choisi.

26.2 ✍ *La fonction $f : A \to F$ est* ***uniformément continue*** *lorsque*

$$\forall\,W \in \mathscr{V}_F(0_F),\ \exists\,V \in \mathscr{V}_E(0_E),\ \forall\,x_0 \in A, \qquad f_*\big(A \cap (x_0 + V)\big) \subset f(x_0) + W.$$

26.3 La fonction $f : A \to F$ est uniformément continue si, et seulement si,

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta > 0,\ \forall\,(x,y) \in A \times A, \qquad \|x - y\|_E \leqslant \eta \implies \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant \varepsilon.$$

27.1 L'ensemble des fonctions uniformément continues de A dans F est un espace vectoriel.

27.2 Une fonction lipschitzienne sur A est uniformément continue sur A.

27.3 Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A.

27.4 ➙ **Continuité uniforme et compacité**
Si $K \subset E$ est une partie compacte et si la fonction $f : K \to F$ est continue, alors f est uniformément continue.

Entraînement

28. Questions pour réfléchir

1. Si la fonction $f : A \to F$ est continue en x_0 :

1.a Il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_A(x_0)$ tel que f soit bornée sur V ;

1.b Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
2. Condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}^* \to E$ admette un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout $x > 0$ et $f(x) = -1$ pour tout $x < 0$. La fonction f est dérivable. Elle n'admet pas de prolongement continu sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
4. La partie $A \cap (x_0 + V)$ est un voisinage de x_0 relatif à A si, et seulement si, V est un voisinage de 0_E.
5. Que signifie le fait qu'une fonction soit uniformément continue en un point x_0 ?
6. Une fonction localement lipschitzienne est-elle uniformément continue ?
7. Une composée de fonctions uniformément continues est-elle uniformément continue ?

29. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ et de $a \in \mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(0,0) = a$ et par

$$\forall\ (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{(xy)^n}{x^2+y^2}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

30. Soient U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. La fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur U.

31. Soient I et J, deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On considère $U = I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = I \times I \times J$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors la fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y,z) = \int_x^y f(t,z)\,\mathrm{d}t$$

est continue.

32. Raccordement de deux fonctions continues
Soient E_1 et E_2, deux parties de $E = \mathbb{R}^2$: on suppose que

$$E_1 = [x \leqslant t] \quad \text{et} \quad [t < x] \subset E_2$$

de telle sorte que $E = E_1 \cup E_2$. On suppose connues deux applications continues $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$.
1. On suppose qu'il existe une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\ u \in E_1, \quad f(u) = f_1(u) \quad \text{et} \quad \forall\ u \in E_2, \quad f(u) = f_2(u).$$

Commenter.
2.a Si $E_2 = [t \leqslant x]$, alors f est continue sur E.
2.b L'application f définie par

$$\forall\ x \leqslant t, \quad f(x,t) = \exp(x-t)$$

et par

$$\forall\ t < x, \quad f(x,t) = \cos(x-t).$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Construire un exemple où $E_2 = [t < x]$ et f n'est pas continue.

IV

Ordres de grandeur

IV.1 Extensions de la notion de limite

33. On considère $f : A \to F$.
33.1 La définition générale [**33.2**] de la notion de limite au voisinage de x_0 couvre le cas ordinaire pour lequel

$$x_0 \in \overline{A} \subset E \quad \text{et} \quad \omega \in F$$

mais aussi les cas suivants :
— pour $x_0 = \pm\infty$ si A est un voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$
— pour $x_0 = \infty$ si A est une partie non bornée de E ;
— pour $\omega = \pm\infty$ (si $F = \mathbb{R}$) ou $\omega = \infty$
— ainsi que le cas d'une suite, de limite finie ou infinie, pour $x_0 = +\infty$ en prenant pour A un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$.

33.2 ✍ *La fonction f **tend vers** ω_0 **au voisinage de** x_0 lorsque*

$$\forall\ W \in \mathscr{V}_F(\omega_0), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0).$$

33.3 Soit $x_0 \in \overline{A}$. La fonction f tend vers l'infini au voisinage de x_0 si, et seulement si, $\|f(x_0+h)\|_F$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0 sous la contrainte $x_0 + h \in A$.
33.4 On a défini des voisinages de l'infini (dans $\mathbb{R}$, dans tout espace vectoriel normé ou relatifs à une partie) qui vérifient les mêmes propriétés filtrantes [**22.17**] que les voisinages d'un point quelconque de l'espace et qui séparent aussi les points. L'unicité de la limite ainsi que le théorème de composition des limites sont donc encore de mise.
En revanche, la notion de prolongement par continuité n'a plus de sens ici.

34. Exemples de limites à l'infini
34.1 L'expression $(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
34.2 L'expression $x^4 + y^2$ tend vers $+\infty$ et le quotient

$$\frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4}$$

tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
34.3 L'expression $x^2\,\ell n(x^4+y^2)$ n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.
34.4 L'expression $x^2y + y\,\ell n^2\,y$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.
34.5 Si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$, alors $q(M)$ tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^3$.

IV.2 Relations de comparaison

35. On étudie l'ordre de grandeur d'une fonction f définie au voisinage de x_0, qui peut être aussi bien un vecteur de E qu'un point à l'infini. On compare pour cela $\|f(x)\|$ à une fonction de référence qui est en général strictement positive.
35.1 ✍ *L'expression $f(x)$ est **dominée** par $g(x)$ au voisinage de x_0 lorsque $\|f(x)\| = \mathcal{O}(\|g(x)\|)$ au voisinage de x_0.*
On note alors $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.
35.2 ✍ *L'expression $f(x)$ est **négligeable** devant $g(x)$ au voisinage de x_0 lorsque $\|f(x)\| = o(\|g(x)\|)$ au voisinage de x_0.*
On note alors $f(x) = o(g(x))$.

36. Pour établir $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$, rien n'oblige à considérer des fonctions f et g qui prennent leurs valeurs dans le même espace vectoriel. Il en va autrement pour déterminer un équivalent de f.

36.1 Pour x voisin de x_0,

$$f(x) - g(x) = o\big(f(x)\big) \iff f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big).$$

36.2 ✍ *Soient f et g, définies sur un même voisinage de x_0, à valeurs dans le même espace vectoriel normé F. Au voisinage de x_0, les fonctions f et g sont **équivalentes** lorsque*

$$f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big)$$

On note alors $f(x) \sim g(x)$.

37. Exemples au voisinage de l'origine
On suppose que le vecteur $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$.

37.1 Si $f_k(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ et si g est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$, alors $g(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

37.2 Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

37.3 Compositions
On suppose que $u(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

1. Pour tout $\boldsymbol{v} \in E$, on a $u(t \cdot \boldsymbol{v}) = o(t)$ pour t voisin de 0.
2. Si $v(\boldsymbol{h}) = o\big(u(\boldsymbol{h})\big)$, alors $v(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.
3. Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi\big(u(\boldsymbol{h})\big) = o(\boldsymbol{h}).$$

38. Exemples au voisinage de l'infini
On suppose ici que $\|\boldsymbol{h}\|$ tend vers $+\infty$.

38.1 Si $f_k(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ et si g est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$, alors $g(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

38.2 Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

38.3 Si $u(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ et si $v(\boldsymbol{h}) = o\big(u(\boldsymbol{h})\big)$, alors $v(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

39. Applications bilinéaires [23.18.3]
Soit φ, une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F.

1. Au voisinage de l'origine, $\varphi(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.
2. Au voisinage de l'infini, $\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}\big(\|\boldsymbol{h}\|^2\big)$.
3. Si $f(h) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha)$ et si $g(h) = o(\|\boldsymbol{h}\|^\beta)$, alors

$$\varphi\big(f(\boldsymbol{h}), g(\boldsymbol{h})\big) = o(\|\boldsymbol{h}\|^{\alpha+\beta}).$$

Entraînement

40. Questions pour réfléchir

1. Soit ρ, une application définie sur un voisinage de 0_E, à valeurs dans F. On suppose que le quotient $\|\rho(h)\|_F/\|h\|_E$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0. Comparer $\rho(h)$ et h.
2. Ordre de grandeur d'une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ au voisinage d'un point M_0 de $\mathscr{E}$.
3. Si $\boldsymbol{h} = (x, y)$ est voisin de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$x^2 y = o(\|\boldsymbol{h}\|^2) \quad \text{et} \quad x^3 = o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

(quelle que soit la norme considérée).

41. L'expression

$$\frac{xy}{x^4 + y^4}$$

n'est pas bornée, mais ne tend pas vers l'infini au voisinage de l'origine.

42. On considère l'application f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|}.$$

Alors $f(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ mais $f(\boldsymbol{h}) \neq o(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $(0,0)$.

43. Une fonction non différentiable
On étudie au voisinage de $(0,0)$ la fonction f définie par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

1. Pour $\boldsymbol{h}$ voisin de l'origine, $f(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$.
2. Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(\boldsymbol{h}) \sim \varphi(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $(0,0)$, alors

$$\forall\, \boldsymbol{h} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\boldsymbol{h}) = x - y.$$

La différence $f(\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{h})$ est dominée par $\boldsymbol{h}$, mais pas négligeable devant $\boldsymbol{h}$.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

44. Exemples et contre-exemples

1. Exemple d'ouvert relatif à un fermé A de E qui soit un fermé de E.
2. Exemple de fermé relatif à un ouvert A de E qui soit un ouvert de E.
3. Exemple de fonction uniformément continue sans être lipschitzienne.
4. Exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue.

45. Questions pour réfléchir

1. Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$, une fonction continue. L'image réciproque par f de tout ouvert (resp. de tout fermé) de F est un ouvert relatif à A (resp. un fermé relatif à A). Réciproque ?
2. Si $f : A \to F$ est continue et si K est un compact de E, la partie $f_*(K \cap A)$ de F est-elle compacte ?

Approfondissement

46. Polynômes de degré 2
L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de la norme définie par

$$\|aX^2 + bX + c\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

1. L'ensemble U des polynômes de degré 2 est un ouvert de E, qui est dense dans E mais pas connexe par arcs.

2.a Le discriminant $\Delta : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.b La partie $F = \big[\Delta(P) = 0\big]$ est un fermé relatif à U qui n'est pas un fermé de E.

2.c Si V est un voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$, alors $V \cap F^c \neq \varnothing$: on dit que F est une **partie d'intérieur vide relativement à** U.

47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \left| \begin{array}{ll} f'(x) & \text{si } x = y, \\ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y. \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

48. La $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, définie par $f(0,y) = 0$ pour tout $y > 0$ et par

$$\forall\, x, y > 0, \quad f(x,y) = x^y$$

est continue, mais ne peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Pour aller plus loin

49. Questions pour réfléchir

1. Soient $\varphi : F \times G \to H$, une application bilinéaire et continue et $f : A \to F$ et $g : A \to G$, deux fonctions uniformément continue sur A. Le produit $\varphi(f, g)$ est-il une fonction uniformément continue sur A ?

2. Soit $f : E \to F$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Si f est continue sur un voisinage de $a \in E$, alors f est uniformément continue au voisinage de a.

3. Condition pour qu'un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$ tende vers l'infini au voisinage de l'infini.

4. Si q est une forme quadratique sur E, espace vectoriel de dimension finie, alors

$$q(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^2) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$.

50. Adhérence relative à une partie

L'**adhérence de** X **relative à** A est égale à $\overline{X} \cap A$.

1. L'adhérence de X relative à A est le plus petit fermé relatif à A qui contient X.

2. Condition sur A pour que l'adhérence de X relative à A soit une partie fermée.

51. Fonctions homogènes

On suppose que f est **homogène de degré** α :

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\lambda \cdot \boldsymbol{u}) = \lambda^\alpha f(\boldsymbol{u}).$$

1. Exemples de fonctions homogènes de degré 1 ? de fonctions homogènes de degré 2 ?

2. Si f est homogène de degré α, alors $f(\boldsymbol{u}) = o(\boldsymbol{u})$ au voisinage de $\mathbf{0}$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.