23
Équivalence des normes

I

Espaces produits

1. Importance de la topologie produit
Les espaces $\mathbb{K}^n$ sont définis comme des espaces vectoriels produits et leur topologie sert de modèle pour la topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie, qui est le cadre théorique pour étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables.
La topologie d'un espace produit permet également de préciser en quel sens l'addition dans un espace vectoriel normé et la multiplication interne dans une algèbre normée, qui sont toutes deux des applications de l'espace produit $E \times E$ dans E, sont des applications continues.

2. Cadre général de l'étude
On considère des espaces vectoriels E_1, E_2, ..., E_p et l'espace vectoriel produit qui leur est associé :

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p.$$

Pour chaque vecteur x de l'espace produit E, il existe des vecteurs $x^1 \in E_1$, $x^2 \in E_2$, ..., $x^p \in E_p$ tels que

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^p).$$

I.1 Topologie d'un espace produit

3. Norme produit
3.1 ✍ *Étant donnés des espaces vectoriels normés*

$$(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p),$$

*on définit la **norme produit** N^∞ sur l'espace vectoriel produit*

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$$

en posant

$$\forall\, (x^1, \ldots, x^p) \in E, \quad N^\infty(x^1, \ldots, x^p) = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \|x^k\|_k.$$

3.2 ➞ *La norme produit N^∞ est une norme sur l'espace produit E.*

4. Parties bornées
4.1 Quel que soit $x = (x^1, \ldots, x^p) \in E$,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \|x^k\|_k \leqslant N^\infty(x).$$

4.2 ➞ *Une partie X de l'espace produit E est bornée pour la norme produit N^∞ si, et seulement si, il existe des parties $X_1 \subset E_1$, bornée pour N_1 ; $X_2 \subset E_2$, bornée pour N_2 ; ...et $X_p \subset E_p$, bornée pour N_p telles que*

$$X \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p.$$

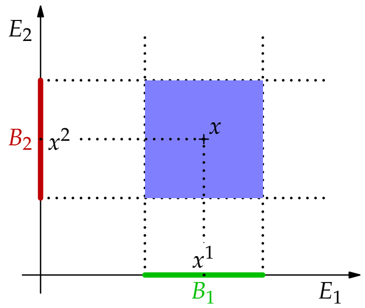
5. Boules
Soient $r > 0$ et $a = (a^1, \ldots, a^p) \in E$.
5.1 La **boule fermée** de centre a et de rayon r dans l'espace produit (E, N^∞) est égale à

$$[\|x^1 - a^1\|_1 \leqslant r] \times [\|x^2 - a^2\|_2 \leqslant r] \times \cdots [\|x^p - a^p\|_p \leqslant r].$$

5.2 La **boule ouverte** de centre a et de rayon r dans l'espace produit (E, N^∞) est égale à

$$[\|x^1 - a^1\|_1 < r] \times [\|x^2 - a^2\|_2 < r] \times \cdots [\|x^p - a^p\|_p < r].$$

5.3 Pour la topologie produit, une boule est un produit cartésien de boules de même rayon.



6. Projections et injections canoniques
6.1 ✍ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la **$k$-ième projection canonique** est l'application linéaire $\pi_k : E \to E_k$ définie par*

$$\forall\, x = (x^1, \ldots, x^p) \in E, \quad \pi_k(x) = x^k.$$

*On dira que x^k est la k-ième **composante** du vecteur $x \in E$.*
6.2 Si $E = \mathbb{K}^p$, alors $\pi_k(x)$ est la k-ième coordonnée du vecteur x relative à la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
6.3 ✍ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la **$k$-ième injection canonique** est l'application linéaire $i_k : E_k \to E$ définie par*

$$\forall\, x^k \in E_k, \quad i_k(x^k) = (0_{E_1}, \ldots, x^k, \ldots, 0_{E_p}).$$

6.4 ➞ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la projection canonique π_k est une application lipschitzienne de (E, N^∞) dans $(E_k, \|\cdot\|_k)$ et l'injection canonique i_k est une isométrie de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ dans (E, N^∞).*

7. Suites convergentes
7.1 ✍ *Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-ième **composante** d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de l'espace produit E est la suite $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n^k = \pi_k(u_n) \in E_k.$$

7.2 ➞ *Soit $\ell = (\ell^1, \ldots, \ell^p) \in E$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers ℓ pour la norme produit N^∞ si, et seulement si, les composantes de la suite u convergent vers les composantes de ℓ :*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \lim_{n\to+\infty} \|u_n^k - \ell^k\|_k = 0.$$

Voisinages, ouverts, fermés

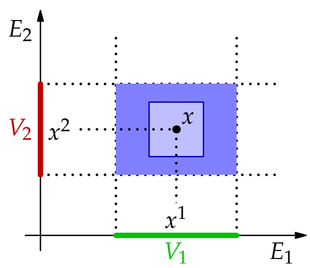
8.1 ✍ *Une partie V de E est un **voisinage élémentaire** du point $x = (x^1, \ldots, x^p) \in E$ lorsqu'il existe des voisinages*

$$V_1 \in \mathscr{V}_{E_1}(x^1), \quad V_2 \in \mathscr{V}_{E_2}(x^2), \ldots, \quad V_p \in \mathscr{V}_{E_p}(x^p)$$

tels que

$$V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p.$$

8.2 Le produit $V_1 \times V_2$ contient une boule de centre x et de rayon strictement positif, c'est donc un voisinage de x.

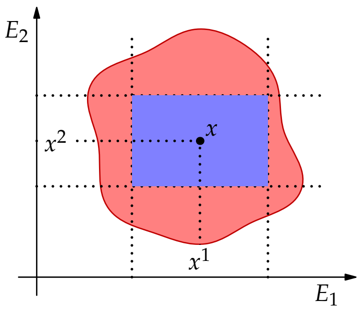


8.3 Pour tout $r > 0$, la boule ouverte et la boule fermée de rayon r et de centre $x \in E$ sont des voisinages élémentaires de E.

9. → *Une partie W de E est un voisinage du point x pour la topologie produit si, et seulement si, elle contient un voisinage élémentaire :*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p,\ \exists\, V_k \in \mathscr{V}_{E_k}\big(\pi_k(x)\big), \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p \subset W.$$

10. La partie X est un voisinage de $x = (x^1, x^2)$ pour la topologie produit sans être un voisinage élémentaire.



11. → *Si U_k est un ouvert de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_p$ est un ouvert de l'espace produit (E, N^∞).*

12. → *Si F_k est un fermé de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ est un fermé de l'espace produit (E, N^∞).*

Parties compactes

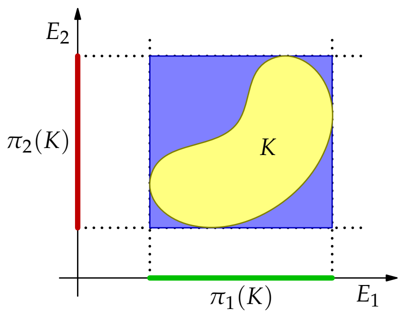
13. → *Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, on suppose que K_j est une partie compacte de E_j. Alors le produit*

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p$$

est une partie compacte de l'espace produit E.

14. → *Si K est un compact de E, alors il existe des compacts $K_1 \subset E_1$, $K_2 \subset E_2$, ..., K_p de E_p tels que*

$$K \subset K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p.$$



I.2 Continuité

Fonctions à valeurs dans un produit

15. La continuité d'une fonction f à valeurs dans un espace produit est facile à étudier : il suffit d'étudier les composantes de f et on peut pour ainsi dire oublier la topologie dont est muni l'espace d'arrivée.

15.1 ✍ *Soit f, une fonction d'un ensemble Ω dans l'espace produit E. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-ième* ***composante*** *de f est la fonction $f^k : \Omega \to E_k$ définie par*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad f^k(\omega) = \pi_k\big(f(\omega)\big).$$

15.2 → *Une fonction f à valeurs dans l'espace produit (E, N^∞) est continue si, et seulement si, chacune de ses composantes est continue.*

15.3 Une application $f : (F, \|\cdot\|_F) \to (E, N^\infty)$ est lipschitzienne si, et seulement si, toutes ses composantes

$$f^k : (F, \|\cdot\|_F) \to (E_k, \|\cdot\|_k)$$

sont lipschitziennes.

Fonctions définies sur un espace produit

16. Une **fonction f de plusieurs variables réelles** $x_1, x_2, \ldots, x_d$ doit être considérée comme une fonction d'*une seule* variable

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

qui appartient à l'espace produit $\mathbb{R}^d$.
L'étude de la continuité de f repose donc sur la topologie produit et il faut savoir que l'étude des **applications partielles**

$$[x_1 \mapsto f(x)], \quad [x_2 \mapsto f(x)], \quad \ldots \quad [x_d \mapsto f(x)]$$

n'est d'aucun intérêt à ce sujet.

17. → **Continuité de l'addition**
Soit $(V, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Si l'espace produit $V \times V$ est muni de la norme produit, alors l'addition

$$[(x, y) \mapsto x + y]$$

est une application linéaire et lipschitzienne de $V \times V$ dans V.

18. **Applications bilinéaires continues**
On considère trois espaces vectoriels normés

$$(F, \|\cdot\|_F), \quad (G, \|\cdot\|_G) \quad \text{et} \quad (H, \|\cdot\|_H)$$

et une application bilinéaire $\varphi : F \times G \to H$.
L'espace vectoriel $E = F \times G$ muni de la norme produit :

$$\forall\, u = (x, y) \in E, \quad N^\infty(u) = \max\{\|x\|_F, \|y\|_G\}.$$

18.1 S'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x, y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x, y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\,\|y\|_G,$$

alors

$$\big\|\varphi(u + v) - \varphi(u)\big\|_H \leqslant C\big[N^\infty(v)\big]\big[N^\infty(v) + 2N^\infty(u)\big]$$

pour tout $(u, v) \in E \times E$.

18.2 Si φ est bornée au voisinage de $0_E = (0_F, 0_G)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x, y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x, y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\,\|y\|_G.$$

18.3 → *Soient $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ et $(H, \|\cdot\|_H)$, trois espaces vectoriels normés et N^∞, la norme produit sur $F \times G$. Une application bilinéaire φ est continue de $(F \times G, N^\infty)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ si, et seulement si,*

$$\exists\, C \geqslant 0,\ \forall\, (x, y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x, y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\,\|y\|_G.$$

18.4 **Exemples fondamentaux**

1. Sur tout espace préhilbertien, comme par exemple $\mathbb{R}^p$, le **produit scalaire** est une forme bilinéaire continue pour la norme associée à ce produit scalaire.
2. Si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne canonique, le **produit vectoriel** est une application bilinéaire continue et le produit mixte est une forme trilinéaire continue.
3. Quel que soit l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$, la **multiplication externe**

$$[(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x]$$

est une application bilinéaire continue de $\mathbb{K} \times V$ dans V.

4. Soit V, une algèbre associative unitaire. Si la norme $\|\cdot\|$ vérifie →[**3.35**]

$$\forall\, (x, y) \in V, \quad \|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

alors la **multiplication interne**

$$[(x, y) \mapsto xy]$$

est une application bilinéaire continue de $V \times V$ dans V.

5. Si l'espace $L_c(E)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée [**3.61.1**] à la norme $\|\cdot\|$ sur E, alors l'application

$$[(f, x) \mapsto f(x)]$$

est une application bilinéaire continue de $L_c(E) \times E$ dans E.

Opérations sur les fonctions continues

19. ➙ *L'ensemble $\mathscr{C}^0(F,G)$ est un espace vectoriel.*

20. ➙ *Soient $f \in \mathscr{C}^0(F,G_1)$ et $g \in \mathscr{C}^0(F,G_2)$. Si φ est une application bilinéaire et continue de $G_1 \times G_2$ dans H, alors l'application*

$$\big[x \mapsto \varphi\big(f(x),g(x)\big)\big]$$

est continue de F dans H.

21. Continuité des fonctions polynomiales

21.1 ➙ *Soit $(V,\|\cdot\|)$, une algèbre normée* [**3.35**]. *Quel que soit le nombre p de variables, les applications polynomiales en p variables de V dans V sont des applications continues de V^p dans V.*

21.2 ➙ *Si $\mathbb{K}^p$ est muni de la norme produit, les applications polynomiales de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ sont continues.*

21.3 ➙ *Si $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont munis de leurs normes produits respectives, les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ sont continues.*

I.3 Topologie produit de $\mathbb{K}^p$

22. L'espace $\mathbb{K}^p$ est muni de sa topologie produit lorsque $\mathbb{K}^p$ est considéré comme l'espace produit défini par

$$(E_1,\|\cdot\|_1) = (E_2,\|\cdot\|_2) = \cdots = (E_p,\|\cdot\|_p) = (\mathbb{K},|\cdot|),$$

la norme produit étant alors définie par

$$\forall\, x = (x^1,\dots,x^p) \in \mathbb{K}^p, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant p} |x^k|.$$

22.1 Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^p$ converge pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la suite des coordonnées $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

22.2 ➙ *Si $\mathbb{K}^p$ est muni de la norme produit, toute partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^p$ est compacte.*

22.3 En particulier, la boule unité fermée et la sphère unité de $\mathbb{K}^p$ sont des parties compactes pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.

Entraînement

23. Questions pour réfléchir

1. La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^3$ est une norme produit. Nature géométrique de la sphère unité. Cette norme sur $\mathbb{R}^3$ est-elle associée à un produit scalaire ?
2. Soit $X = \{1,\dots,p\}$. L'espace $\mathbb{K}^p$ muni de la norme produit est canoniquement isométrique à l'espace $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur X.
3. *Suite de* [**6**] – Étudier les applications $i_k \circ \pi_k$ et $\pi_k \circ i_k$.
4. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors son graphe est une partie fermée de l'espace produit $E \times F$.
5. Si les applications $f_k : (E_k,N_k) \to (F,\|\cdot\|)$ sont lipschitziennes pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors l'application $f : E \to F^p$ définie par
$$\forall\, x = (x^1,\dots,x^p) \in E, \quad f(x) = \big(f_1(x^1),\dots,f_p(x^p)\big)$$
est lipschitzienne de (E,N^∞) dans $(F^p,\|\cdot\|_\infty)$.
6. Une application bilinéaire et continue de $F \times G$ dans H est-elle lipschitzienne ?
7. Soit $\varphi : E \to F$, un morphisme d'algèbres, qu'on suppose continu (en tant qu'application linéaire de E dans F). L'application
$$\big[(u,v) \mapsto \varphi(u \star v)\big]$$
est continue de $E \times E$ dans F.
8. Si f et g sont deux applications continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans une algèbre normée $(F,\|\cdot\|_F)$, alors leur produit
$$\big[t \mapsto f(t)g(t)\big]$$
est une application continue de I dans F.
9. Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et si f et g sont deux applications continues de I dans $(F,\|\cdot\|_F)$, alors
$$\big[t \mapsto \lambda(t)\cdot f(t) + g(t)\big]$$
est une application continue de I dans F.
10. Une fonction de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est **rationnelle** lorsque chacune de ses composantes est le quotient de deux fonctions polynomiales de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$.
Une fonction rationnelle de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est continue sur son ensemble de définition.

II

Changement de norme

24. Un même espace vectoriel E peut être muni de différentes normes et deux normes distinctes sur un même espace vectoriel définissent *a priori* deux topologies différentes. On n'étudie ici que les conséquences d'un changement de norme qui ne modifie pas la topologie de E.

II.1 Comparaison des normes

Domination

25. ✍ *La norme N_1 est **dominée** par la norme N_2 lorsque*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in E, \quad N_1(x) \leqslant kN_2(x).$$

26. La norme N_1 est dominée par N_2 si, et seulement si, l'application $\mathrm{I}_E : (E,N_2) \to (E,N_1)$ est lipschitzienne.

27. Comparaison des topologies

On suppose que la norme N_1 est dominée par la norme N_2.

27.1 Toute partie bornée pour N_2 est bornée pour N_1.

27.2 Toute application $f : X \to E$ qui est bornée pour N_2 est aussi bornée pour N_1.

27.3 Si V est un voisinage de x_0 pour N_1, alors V est aussi un voisinage de x_0 pour N_2.

27.4 Toute partie U de E qui est ouverte pour la norme N_1 est aussi ouverte pour la norme N_2.

27.5 Si $N_2(x_n)$ tend vers 0, alors $N_1(x_n)$ tend vers 0.

27.6 Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme N_2, alors elle converge aussi vers ℓ pour la norme N_1.

27.7 Toute partie F de E qui est fermée pour la norme N_1 est aussi fermée pour la norme N_2.

27.8

1. Si f est lipschitzienne de (E,N_1) dans $(F,\|\cdot\|)$, alors f est lipschitzienne de (E,N_2) dans $(F,\|\cdot\|)$.
2. Si g est lipschitzienne de $(F,\|\cdot\|)$ dans (E,N_2), alors g est lipschitzienne de $(F,\|\cdot\|)$ dans (E,N_1).

$$\begin{tikzcd}
(E,N_2) \arrow[r, "\mathrm{I}_E"] \arrow[dr, dotted] & (E,N_1) \arrow[d, "f"] \\
& (F,\|\cdot\|)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F,\|\cdot\|) \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dotted] & \\
(E,N_2) \arrow[r, "\mathrm{I}_E"] & (E,N_1)
\end{tikzcd}$$

27.9

1. Si f est continue de (E,N_1) dans $(F,\|\cdot\|)$, alors f est continue de (E,N_2) dans $(F,\|\cdot\|)$.
2. Si g est continue de $(F,\|\cdot\|)$ dans (E,N_2), alors g est continue de $(F,\|\cdot\|)$ dans (E,N_1).

28. Méthodes

Pour démontrer que N_1 n'est pas dominée par N_2, il s'agit de démontrer que le rapport ${N_1(x)}/{N_2(x)}$ n'est pas borné lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

Il suffit pour cela de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_2(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_1(x_n) = \infty \tag{1}$$

ou telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_1(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_2(x_n) = 0 \tag{2}$$

ou telle que

$$N_2(x_n) = o\big(N_1(x_n)\big) \tag{3}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Normes équivalentes

29.1 ✍ *La norme N_2 est **équivalente** à la norme N_1 lorsqu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que*

$$\forall\, x \in E, \quad aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x).$$

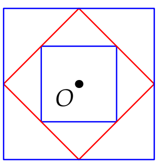
29.2 La norme N_2 est équivalente à la norme N_1 si, et seulement si, la norme N_1 est équivalente à la norme N_2.
29.3 Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1.
29.4 Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, l'application $\mathrm{I}_E \;:\; (E, N_1) \to (E, N_2)$ est lipschitzienne ainsi que sa réciproque $\mathrm{I}_E \;:\; (E, N_2) \to (E, N_1)$.
30. Comparaison des topologies
On suppose que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
30.1 Une partie $A \subset E$ est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2.
30.2 Une partie $V \subset E$ est un voisinage de $x_0 \in E$ pour N_1 si, et seulement si, c'est un voisinage de x_0 pour N_2.
30.3 Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_1 si, et seulement si, elle converge pour N_2 et, dans ce cas, sa limite est la même pour les deux normes.
30.4 Une partie F de E est fermée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est fermée pour la norme N_2.
30.5 Les parties ouvertes pour N_1 et les parties ouvertes pour N_2 sont les mêmes.
30.6 Une partie de E est compacte pour N_1 si, et seulement si, elle est compacte pour N_2.
30.7 Une application $f \;:\; (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne si, et seulement si, $f \;:\; (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne.
30.8 Une application $g \;:\; (F, \|\cdot\|) \to (E, N_1)$ est lipschitzienne si, et seulement si, $g \;:\; (F, \|\cdot\|) \to (E, N_2)$ est lipschitzienne.
30.9 Une application $f \;:\; (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est continue si, et seulement si, $f \;:\; (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$ est continue.
30.10 Une application $g \;:\; (F, \|\cdot\|) \to (E, N_1)$ est continue si, et seulement si, $g \;:\; (F, \|\cdot\|) \to (E, N_2)$ est continue.

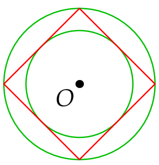
Comparaison des normes usuelles

31. → Sur $\mathbb{K}^n$
Les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

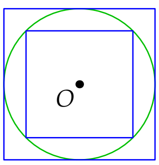
$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2\end{aligned}$$

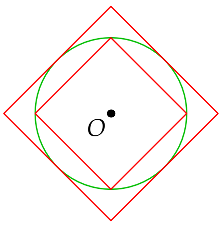
32. On peut traduire géométriquement l'équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$ en comparaison les cercles unité de ces différentes normes.
32.1 Si $\|x\|_1 = 1$, alors $1/2 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant 1$.



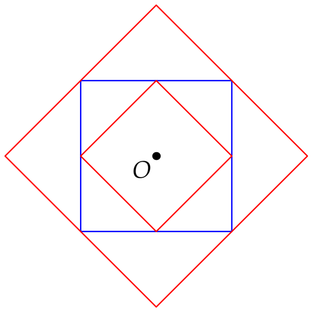


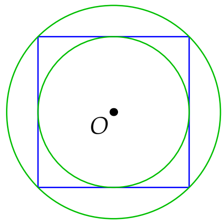
32.2 Si $\|x\|_2 = 1$, alors $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{2}$.





32.3 Si $\|x\|_\infty = 1$, alors $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2$ et $1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}$.





33. Sur $\ell^1(\mathbb{R})$
33.1

$$\forall\, x \in \ell^1(\mathbb{R}), \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

33.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \big(\underbrace{1/n, \cdots, 1/n}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \dots\big).$$

Alors

$$\|x_n\|_\infty = \frac{1}{n}, \quad \|x_n\|_1 = 1, \quad \|x_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

34. Sur $\mathscr{C}^0([a,b])$
Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$,

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \quad \text{et} \quad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

II.2 Topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie

35. Soient E, un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{K}$ et φ, un isomorphisme de $\mathbb{K}^d$ sur E.
Pour toute norme N sur E, il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^d$ telle que φ soit une isométrie de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|)$ sur (K, N) :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \qquad N\big(\varphi(x)\big) = \|x\|.$$

36.1 Soient $(e_1, \dots, e_d)$, la base canonique de $\mathbb{K}^d$ et N, une norme sur $\mathbb{K}^d$. Alors

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad N(x) \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{d} N(e_k)\Big)\|x\|_\infty.$$

36.2 Toute norme N sur $\mathbb{K}^d$ est une application lipschitzienne de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
36.3 La sphère unité de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.
36.4 → *Toutes les normes sur $\mathbb{K}^d$ sont équivalentes.*
36.5 → *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*
36.6 La topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie est donc indépendante de la norme choisie et il est inutile de préciser pour quelle norme particulière une suite est convergente ; une fonction est continue ; une partie est bornée, ouverte, fermée, compacte...
37. → Continuité des applications linéaires
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue, quelles que soient les normes choisies sur E et F, quelle que soit la dimension de F.

Entraînement

38. Questions pour réfléchir

1. La norme N_1 est dominée par N_2 si, et seulement si, la boule unité $B^1(N_2)$ pour la norme N_2 est une partie bornée pour la norme N_1.

2. Si la norme N_1 est dominée par N_2 sans être équivalente à N_2, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la norme N_1 et qui diverge pour la norme N_2.

3. L'équivalence **[29.1]** est-elle une relation d'équivalence sur les normes ?

4. Les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur $\ell^1(\mathbb{R})$?

5. Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue et affine par morceaux sur $[0,1]$ telle que

$$\|f_n\|_\infty = n, \quad \|f_n\|_1 = C, \quad \|f_n\|_2 = \Theta(\sqrt{n}).$$

Que peut-on en déduire ?

6. On considère l'espace E des fonctions continues, intégrables et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6.a Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n \in E$ telle que

$$\|f_n\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = \Theta(\sqrt{n}).$$

6.b Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $g_n \in E$ telle que

$$\|g_n\|_1 = \Theta(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_2 = 0.$$

39. Normes comparables et non comparables

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \quad \text{et} \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in[-1,1]} \left|P(t)\right|$$

ainsi que

$$\|P\|_3 = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{si} \quad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k.$$

1.a La norme $\|\cdot\|_1$ domine $\|\cdot\|_3$ et comme

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|P(t)\right| \leqslant \|P\|_1 \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|t|^k}{k!}$$

elle domine aussi $\|\cdot\|_2$.

1.b La norme $\|\cdot\|_1$ n'est dominée ni par $\|\cdot\|_2$, ni par $\|\cdot\|_3$ (considérer la base canonique de $\mathbb{R}[X]$).

2.a Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$, alors la dérivation $D = [P \mapsto P']$ est un endomorphisme continu.

2.b Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ ou de la norme $\|\cdot\|_3$, alors l'endomorphisme D n'est pas continu.

3. La norme $\|\cdot\|_2$ ne domine pas $\|\cdot\|_3$ (considérer $(1-X^2)^{2n}$ avec **[4.49.4]**) et la norme $\|\cdot\|_3$ ne domine pas $\|\cdot\|_2$ (considérer $1 + X + \cdots + X^n$).

40. Normes non comparables

Lorsque deux normes ne sont pas comparables, une même suite peut converger vers deux limites différentes.
On considère l'espace E des fonctions rationnelles de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont tous les pôles appartiennent à $\mathbb{U}$, sur lequel on définit deux normes en posant

$$N_1(f) = \sup_{|z|=\frac{1}{2}} \left|f(z)\right| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{|z|=2} \left|f(z)\right|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n(z) = \frac{z^n}{1+z^n}$$

appartient à E.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante, égale à 0, pour la norme N_1 et converge vers la fonction constante, égale à 1, pour la norme N_2.

41. Normes sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Le **rayon spectral** défini par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. →**[18.29.3]**

2. L'application définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \lambda^2}$$

(où m_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ) est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: la norme induite par restriction de la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$M_p = I_n + \mathrm{Diag}(1/p, \ldots, n/p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La suite $(M_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers I_n pour toute norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
L'application N définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda^2}$$

n'est donc pas une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Questions, exercices & problèmes

42. Exemples et contre-exemples

1. Exemple d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie produit qui n'est pas un produit d'ouverts de $\mathbb{R}$.

2. Exemple de compact de l'espace produit E qui n'est pas un produit de parties compactes de $E_1, \ldots, E_p$.

43. Banque CCP

Exercices 37, 38.

Approfondissement

44. Normes sur $\mathscr{C}^1([-1,1])$

L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ est muni des normes usuelles :

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} \left|f(t)\right| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} \left|f(t)\right| \mathrm{d}t,$$

de la norme hilbertienne définie par

$$\|f\|_2 = \sqrt{\left[f(0)\right]^2 + \int_0^1 \left[f'(s)\right]^2 \mathrm{d}s}$$

et des normes N_1 et N_2 définies par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left|f(0)\right| + \|f'\|_\infty.$$

1. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$\forall\, f \in E, \quad N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_2(f).$$

2.a Les normes N_1 et N_2 dominent la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.b Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, sans être bornée pour N_1, ni pour N_2.

3. La norme $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$, mais il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_1$ sans être bornée pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_2.$$

La suite de fonctions de terme général $f_n = [t \mapsto \sin nt]$ est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ alors que $\|f_n\|_2 \sim n/2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

45. Trois normes équivalentes
On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$.

1. Les applications N_1, N_2 et N_3 définies par

$$\forall\, f \in E, \qquad \begin{cases} N_0(f) &= \|f'\|_\infty \\ N_1(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ N_2(f) &= \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

sont des normes sur E.

2. Soit $f \in E$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $N_0(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_0(f)$

3. Soient $f \in E$ et $g = f + f'$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = e^{-t} \int_0^t e^s g(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $\|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ et $N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 3N_2(f)$.

46. Normes sur un espace de suites [3.32]
On note V, l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Comparer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur V.
2. On considère V comme un sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. L'intérieur de V est vide et son adhérence est l'espace des suites de limite nulle (en particulier, V n'est pas fermé).

Pour aller plus loin

47. Questions pour réfléchir

1. Soit N, une norme sur l'espace produit E telle que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la projection canonique π_k soit continue de (E, N) dans (E_k, N_k). Comparer N à la norme produit N^∞.
2. On appelle **ouvert élémentaire** de l'espace vectoriel produit (E, N^∞) tout ouvert U de la forme $U = U_1 \times \cdots \times U_p$, où chaque U_k est un ouvert de $(E_k, \|\cdot\|_k)$.
Tout ouvert de (E, N^∞) est réunion d'une famille d'ouverts élémentaires.
3. Caractériser les applications p-linéaires et continues de l'espace produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F.
4. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, toute application p-linéaire de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue, quelles que soient les normes choisies sur $E_1, \ldots, E_p$ et F, quelle que soit la dimension de F.

48.

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1(x) < 1$ pour tout $x \in E$ tel que $N_2(x) < \alpha$. Alors

$$\forall\, x \neq 0_E,\ \forall\, \lambda > \frac{N_2(x)}{\alpha}, \quad N_1(x) < \lambda$$

et

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2(x).$$

2. Si la boule unité ouverte de E pour la norme N_1 est aussi une partie ouverte pour la norme N_2, alors la norme N_1 est dominée par la norme N_2.
3. On suppose qu'une partie quelconque de E est ouverte pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est ouverte pour la norme N_2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

49. *Suite de* [3.58] – On suppose que la constante de Lipschitz optimale de $f : (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est égale à k.

1. Étudier les valeurs possibles pour la constante optimale de Lipschitz pour $f : (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$.
2. Exemple de fonction pour laquelle la constante de Lipschitz optimale est indépendante de la norme choisie ?