Espaces préhilbertiens [77]

[77.1]

❧ Si $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} A = p$, alors la matrice A est inversible. Donc

$$\begin{aligned} Ax = y_0 &\iff A^{-1}(Ax) = A^{-1}y_0 \\ &\iff x = A^{-1}y_0. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'équation $Ax = y_0$ admet une seule solution et que cette solution est $A^{-1}y_0$.

[77.3]

❧ Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est toujours majoré par $\min\{n, p\}$. Comme on suppose ici que $\operatorname{rg} A = p$, il faut donc que $n \geqslant p$ et on ne distingue que deux possibilités.

— Si $n = p$, on est ramené au cas **[77.1]**.

— Si $n > p$, alors le rang de A est *strictement* inférieur au nombre de lignes (c'est-à-dire à la dimension de l'espace d'arrivée), ce qui montre que A n'est pas surjective.

1. En notant $C_1, \dots, C_p$, les colonnes de la matrice A et en considérant la colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$$

et par conséquent

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \sum_{k=1}^{p} x_k C_k = 0.$$

Autrement dit : les vecteurs du noyau de A correspondent aux relations de liaison entre les colonnes de A.

Comme on suppose ici que les colonnes de A sont linéairement indépendantes, la matrice A est injective et l'équation $Ax = y_0$ admet donc *au plus une* solution.

Plus précisément,

— si $y_0 \in \operatorname{Im} A$, alors l'équation $Ax = y_0$ admet exactement une solution ;

— si $y_0 \notin \operatorname{Im} A$, alors l'équation $Ax = y_0$ n'a pas de solution.

❧ Nous nous donnons pour objectif de définir une "solution alternative" avec le cahier des charges suivant :

— quel que soit $y_0 \in F$, l'équation $Ax = y_0$ admet une, et une seule, solution alternative ;

— si l'équation $Ax = y_0$ admet une solution, la solution alternative doit coïncider avec la solution "normale" ;

— si l'équation $Ax = y_0$ n'admet pas de solution, la solution alternative doit être une alternative "raisonnable" (il ne serait pas raisonnable de convenir que la solution alternative serait le vecteur nul indépendamment du vecteur y_0 considéré).

2. Comme $\operatorname{Im} A$ est un espace de dimension finie, la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ est bien définie. On peut donc considérer le projeté orthogonal z_0 du vecteur y_0 sur $\operatorname{Im} A$.

❧ Par définition, on a

$$z_0 \in \operatorname{Im} A \quad \text{et} \quad y_0 - z_0 \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}.$$

On déduit alors du Théorème de Pythagore que

$$\begin{aligned}\forall\, z \in \operatorname{Im} A, \quad \|y_0 - z\|^2 &= \Big\| \underbrace{(y_0 - z_0)}_{\in (\operatorname{Im} A)^\perp} + \underbrace{(z_0 - z)}_{\in \operatorname{Im} A} \Big\|^2 \\ &= \|y_0 - z_0\|^2 + \|z_0 - z\|^2 \qquad (\star) \\ &\geqslant \|y_0 - z_0\|^2\end{aligned}$$

et comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$, ce minorant est en fait le minimum :

$$\|y_0 - z_0\| = \min_{z \in \operatorname{Im} A} \|y_0 - z\|.$$

❧ Comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$ et que A est injective, il existe un *unique* vecteur $x_0 \in E$ tel que $z_0 = Ax_0$.

On déduit en outre de $(\star)$ que le minimum est atteint *seulement* pour $z = z_0$.

Par conséquent, il existe un, et un seul, vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$\|y_0 - Ax_0\| = \min_{x \in E} \|y_0 - Ax\|.$$

REMARQUE.— Si $y_0 \in \operatorname{Im} A$, alors il existe un, et un seul, vecteur $u_0 \in E$ tel que $Au_0 = y_0$. Mais, dans ce cas, on a $z_0 = y_0 = Au_0$ et donc $x_0 = u_0$: si l'équation admet une solution u_0 "au sens classique", la solution x_0 "au sens des moindres carrés" est égale à u_0.

3. Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $y_0 - z_0 = y_0 - Ax_0$ est orthogonal au sous-espace $\operatorname{Im} A$. Par conséquent,

$$\forall\, u \in E, \quad \langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle = 0.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle &= (Au)^\top.(y_0 - Ax_0) \\ &= u^\top.A^\top(y_0 - Ax_0) \\ &= \langle\, u \,|\, A^\top(y_0 - Ax_0) \,\rangle.\end{aligned}$$

Cela prouve que le vecteur $A^\top(y_0 - Ax_0)$ est orthogonal à tout vecteur $u \in E$ et donc qu'il est nul :

$$A^\top(y_0 - Ax_0) = 0$$

et donc

$$A^\top y_0 = A^\top.Ax_0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $A^\top.Ax = A^\top y$. Il est alors clair que

$$Ax \in \operatorname{Im} A \qquad (\dagger)$$

et que $A^\top.(Ax - y_0) = 0$. Par conséquent, pour tout $u \in E$,

$$0 = u^\top.A^\top.(Ax - y_0) = (Au)^\top.(Ax - y_0) = \langle\, Au \,|\, Ax - y_0 \,\rangle$$

c'est-à-dire

$$\forall\, z \in \operatorname{Im} A, \quad \langle\, z \,|\, Ax - y_0 \,\rangle = 0$$

ou encore

$$Ax - y_0 \in (\operatorname{Im} A)^\perp. \qquad (\ddagger)$$

Les propriétés $(\dagger)$ et $(\ddagger)$ prouvent que Ax est le projeté orthogonal du vecteur y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$ et donc, comme on l'a prouvé plus haut, que $x = x_0$.

❧ Ainsi, l'équation $A^\top.Ax = A^\top y_0$ admet le vecteur x_0 pour unique solution.

4. Comme $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc

$$A^\top.A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est une matrice carrée.

❧ Si $A^\top.Ax = 0$, alors

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^\top.(Ax) = (x^\top.A^\top)Ax = x^\top.(A^\top.Ax) = 0.$$

Par conséquent, $Ax = 0$ et comme A est injective, on en déduit que $x = 0$.

Ainsi, la matrice carrée $A^\top.A$ est injective et donc (Théorème du rang) inversible.

❧ Dans ces conditions,

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0 \iff x = (A^\top.A)^{-1}A^\top.y_0.$$

La solution "au sens des moindres carrés" de l'équation $Ax = y_0$ peut donc être calculée directement par la résolution d'un système de Cramer.