RMS 2022 [1175]

> *On considère l'équation différentielle*
>
> $$(x^2-1)y''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=0. \tag{E}$$
>
> ❧ *Déterminer les solutions polynomiales de* (E). ❧ *Déterminer une équation différentielle* (E') *vérifiée par* $z(x)=y(x)/x$. ❧ *Calculer les réels* a, b *et* c *tels que*
>
> $$\frac{2-4X^2}{X(X^2-1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}.$$
>
> ❧ *En déduire les solutions de* (E')*, puis les solutions de* (E)*.*

❧ L'équation étant linéaire et homogène, on peut supposer que la solution y est une fonction polynomiale unitaire de degré d :

$$y(x)=x^d+\cdots$$

où les termes absents constituent une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à d.

On en déduit que

$$xy'(x)=dx^d+\cdots \quad \text{et} \quad (x^2-1)y''(x)=d(d-1)x^d+\cdots.$$

Par conséquent,

$$(x^2-1)y''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=(d^2+d-2)x^d+\cdots$$

et comme le second membre est identiquement nul, il faut que

$$0=d^2+d-2=(d-1)(d+2)$$

et donc que $d=1$.

En substituant $y(x)=x+a$ dans l'équation, on trouve $a=0$.

Par conséquent, y est une solution polynomiale de l'équation (E) si, et seulement si, il existe une constante réelle K telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, \qquad y(x)=K.x.$$

❧ L'énoncé suggère simplement d'achever la résolution de l'équation en appliquant la méthode de variation de la constante !

On cherche une solution y de la forme $y(x)=xz(x)$. En supposant que z soit de classe $\mathscr{C}^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y(x)&=xz(x)\\ y'(x)&=xz'(x)+z(x)\\ y''(x)&=xz''(x)+2z'(x) \end{aligned}$$

et donc que

$$(x^2-1)y''(x)+2xy'(x)-2y(x)=(x^2-1)xz''(x)+(4x^2-2)z'(x).$$

La fonction z est donc une solution de l'équation

$$(x^2-1)xz''(x)+(4x^2-2)z'(x)=0. \tag{E'}$$

On remarquera que cette équation est en fait une équation du *premier ordre* en l'inconnue $z'(x)$.

❧ Avec les méthodes usuelles, on trouve rapidement

$$\frac{2-4X^2}{X(X^2-1)}=\frac{-2}{X}-\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}.$$

❧ En considérant (E') comme une équation d'inconnue $z'(x)$, on déduit de la décomposition en éléments simples précédentes que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe une constante réelle K_1 telle que

$$z'(x) = \frac{K_1}{x^2(x+1)(x-1)}.$$

Nouvelle décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X^2(X+1)(X-1)} = \frac{-1}{X^2} - \frac{1/2}{X+1} + \frac{1/2}{X-1}$$

et on en déduit que z est solution de (E') si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$z(x) = K_2 + K_1\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\ell n\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right).$$

Par conséquent, y est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux constantes réelles K_1 et K_2 telles que

$$y(x) = K_1\left(1 + \frac{x}{2}\,\ell n\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) + K_2 x.$$

REMARQUE.— On a passé sous silence la question des intervalles de définition. Il y a ici trois singularités : $x = \pm 1$ (qui se voient sur l'équation différentielle elle-même) et $x = 0$ (qui apparaît lors de la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante). Par conséquent, il y a quatre intervalles de résolution :

$$I_1 =]-\infty, -1[, \quad I_2 =]-1, 0[, \quad I_3 =]0, 1[, \quad I_4 =]1, +\infty[$$

et, pour chacun de ces intervalles, il y a deux constantes d'intégration — soit en tout *huit* constantes d'intégration !

Plus précisément, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe deux constantes réelles A_k et B_k telles que

$$\forall\, x \in I_k, \quad y(x) = A_k\left(1 + \frac{x}{2}\,\ell n\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) + B_k x.$$

❧ Je rappelle que $\ell n\,|u(x)|$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur tout intervalle sur lequel la fonction u ne s'annule pas.

Il est donc inutile de discuter sur l'intervalle pour calculer les primitives, c'est seulement pour simplifier l'expression des primitives (= éliminer la valeur absolue) que la discussion est nécessaire.

REMARQUE.— On peut ensuite se pencher sur la question des raccordements en $x = 0$ et en $x = \pm 1$.

► Pour que les solutions sur I_3 et I_4 se raccordent par continuité en $x = 1$, il faut d'une part que $A_3 = A_4 = 0$ (pour qu'il y ait une limite finie) et d'autre part que $B_3 = B_4$ (pour que les limites à gauche et à droite coïncident).

Il est clair que la fonction $[x \mapsto Bx]$ est solution sur $]0, +\infty[$.

► Idem pour le raccordement autour de $x = -1$.

► Pour le raccordement en $x = 0$, il faut que $A_2 = A_3$ (égalité de la limite à gauche et de la limite à droite pour la continuité) et que $B_2 = B_3$ (égalité de la dérivée à gauche et de la dérivée à droite pour la dérivabilité).

Réciproquement, quelles que soient les constantes A et B, sur l'intervalle $]-1, 1[$, les solutions de la forme

$$Ax + B\left[1 + \frac{x}{2}\,\ell n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right],$$

sont clairement développables en série entières sur $]-1, 1[$: on aurait donc pu trouver ces solutions en cherchant les solutions développables en série entière (ce qui aurait masqué la singularité en $x = 0$).

Avec

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

on obtient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot a_n.$$

Pour les indices impairs, le coefficient a_1 peut être choisi arbitrairement et comme $a_3 = 0 \times a_1$, tous les autres termes d'indice impair sont nuls.

Pour les indices pairs, on trouve

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{-a_0}{2p-1}$$

donc

$$y(x) = a_1 x + a_0 \Big(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p-1} \Big),$$

ce qui est conforme aux résultats trouvés plus haut.

❧ Enfin, pour l'anecdote, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $[x \mapsto Ax]$ (pour $A \in \mathbb{R}$ quelconque).