RMS 2022 [1122]

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ *Justifier sans calcul que* A *est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.* ❧ *Résoudre le système différentiel suivant.*

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

❧ La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

REMARQUE.— Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de A, même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)

REMARQUE.— Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

► La deuxième colonne de la matrice A nous indique que 1 est une valeur propre de A. De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$.

► La trace de A est égale à 3 et comme A est diagonalisable, il existe deux réels $1 \pm \alpha$ tels que $\mathrm{Sp}(A) = \{1 - \alpha;\ 1;\ 1 + \alpha\}$.

Le déterminant de A est égal à -3 (calcul rapide) et aussi à $1 - \alpha^2$, donc $\alpha = 2$ et

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1;\ 1\ 3\}.$$

► Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $\mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$.

► En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Diag}(-1,\ 1,\ 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres -1, 1 et 3).

REMARQUE.— On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.

On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage P orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

❧ En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de A.

REMARQUE.— Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle $y' = y$ et d'autre part le système

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

❧ **Première méthode.**
En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \qquad v(t) = K_2 e^{t}, \qquad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc $X = (x, y, z)$ est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^{t} \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

❧ Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.

Cela dit, le cours nous dit que la solution X peut s'exprimer en fonction de la position initiale $X(0)$ à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \dfrac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé P^{-1}) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne $X(0)$ est quelconque, on peut en déduire $\exp(tA)$ par identification.

Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

❧ **Deuxième méthode**

On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour A :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale P_k sur la droite $\mathbb{R} \cdot U_k$ est donnée par

$$P_k = \frac{U_k.U_k^{\top}}{U_k^{\top}.U_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres U_1, U_2 et U_3 étant -1, 1 et 3 respectivement, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n \cdot P_1 + 1^n \cdot P_2 + 3^n \cdot P_3$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = e^{-t} \cdot P_1 + e^{t} \cdot P_2 + e^{3t} \cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA).X(0) = e^{-t} \cdot P_1 X(0) + e^{t} \cdot P_2 X(0) + e^{3t} \cdot P_3 X(0).$$

REMARQUE.— Cette méthode pour calculer $\exp(tA)$ est préférable à la précédente (ça n'engage que moi).