RMS 2022 [1177]

> *On considère le système différentiel*
>
> $$\begin{cases} x' = \quad y - z \\ y' = -x \quad\quad + z \\ z' = x - y \end{cases} \tag{S}$$
>
> *avec les conditions* $x(0) = 1$ *et* $y(0) = z(0) = 0$. ❧ *Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (S).* ❧ *On suppose que* (x, y, z) *est une solution de (S). Démontrer que les fonctions* $x + y + z$ *et* $x^2 + y^2 + z^2$ *sont constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?* ❧ *Résoudre le système (S).*

❧ Le système (S) peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants sous forme résoluble :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $I = \mathbb{R}$ est un intervalle, la Théorie de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour la condition initiale particulière

$$\big(t = 0, X(0) = (1, 0, 0)\big),$$

le système (S) admet une, et une seule, solution.

❧ En tant que fonctions polynomiales des fonctions x, y et z (qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I), les fonctions $f = x + y + z$ et $g = x^2 + y^2 + z^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, d'après (S),

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) &= x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0 \\ g'(t) &= 2\big(x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)\big) = 0 \end{aligned}$$

donc les fonctions f et g sont constantes sur l'intervalle I.

D'après la condition initiale, $f(0) = g(0) = 1$.

La trajectoire

$$\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ t \in \mathbb{R}\big\}$$

est donc contenue dans l'intersection du plan affine d'équation $[x + y + z = 1]$ et de la sphère d'équation $[x^2 + y^2 + z^2 = 1]$: elle est donc contenue dans un cercle.

REMARQUE.— Il est trop tôt pour établir que l'inclusion réciproque est vraie.

❧ **Variantes**

► Si $AX = \lambda X$, alors $A^n X = \lambda^n X$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent,

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n A^n}{n!} \cdot X = \sum_{n=0}^{N} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \cdot X.$$

Il est clair que le second membre tend vers $e^{\lambda t} \cdot X$. Comme l'application

$$[M \mapsto MX]$$

est continue (application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie), on déduit du théorème de composition des limites que

$$\lim_{N \to +\infty} (M_n.X) = \Big(\lim_{N \to +\infty} M_n\Big).X$$

et donc, par unicité de la limite, que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \cdot X = e^{\lambda t} \cdot X.$$

Ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes : comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \exp(tA) \cdot X(0) \\ &= e^{0\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(0) \\ &= f(0) = 1. \end{aligned}$$

► On peut aussi remarquer que $g(t) = X(t)^\top.X(t)$.

▷ On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= \big[X'(t)\big]^\top.X(t) + X(t)^\top.X'(t) \\ &= \big[A.X(t)\big]^\top.X(t) + X(t)^\top.A.X(t) \\ &= X(t)^\top.(-A).X(t) + X(t)^\top.A.X(t) = 0 \end{aligned}$$

puisque la matrice A est anti-symétrique.

▷ Mais on peut procéder d'une autre manière ! Comme $X(t) = \exp(tA).X(0)$, alors

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t)^\top.X(t) &= X(0)^\top.[\exp(tA)]^\top.exp(tA).X(0) \\ &= X(0)^\top.exp(tA^\top).exp(tA).X(0) \\ &= X(0)^\top.exp(0_n).X(0) = X(0)^\top.X(0) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'expression $g(t) = X(t)^\top.X(t)$ est bien indépendante de t.

❧ La matrice A étant anti-symétrique, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ mais elle l'est dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ (un peu de culture mathématique ne peut pas nuire).

Comme je n'ai pas envie de calculer dans $\mathbb{C}$, je vais calculer le polynôme minimal de A pour en déduire l'expression générale des puissances de A.

► On vérifie sans peine que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad A^3 = -3A.$$

On en déduit (de proche en proche, par tâtonnements) que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad A^{2p+1} = (-3)^p A \quad \text{et que} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad A^{2p} = (-3)^{p-1} A^2.$$

Remarque.— Le polynôme $X^3 + 3X = X(X^2+3)$ est un polynôme annulateur de A, c'est même son polynôme minimal et son polynôme caractéristique — mais c'est inutile de le savoir, ça ne simplifierait pas nos calculs.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) &= I_3 + \bigg(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{p-1} t^{2p}}{(2p)!}\bigg) \cdot A^2 + \bigg(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-3)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!}\bigg) \cdot A \\ &= I_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \bigg(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3}\, t)^{2p+1}}{(2p+1)!}\bigg) \cdot A \\ &\qquad - \frac{1}{3} \cdot \bigg(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\sqrt{3}\, t)^{2p}}{(2p)!}\bigg) \cdot A^2 \\ &= \Big[I_3 - \frac{1}{3} A^2\Big] + \frac{\sin \sqrt{3}\, t}{\sqrt{3}} \cdot A + \frac{\cos \sqrt{3}\, t}{3} \cdot A^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale,

$$X(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left[\cos \sqrt{3}\, t \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{3}\, t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Comme les deux vecteurs qui apparaissent dans le crochet sont unitaires et orthogonaux, on reconnaît bien le paramétrage d'un cercle de rayon $\sqrt{2/3}$ et de centre $\frac{1}{3} \cdot (5, -1, -1)$.

On vérifie sans peine que ce cercle est contenu dans le plan $[x+y+z = 1]$.