RMS 2022 [1176]

> ❧ *La matrice*
> $$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
> *est-elle diagonalisable ?* ❧ *Démontrer que la matrice* A *est semblable à une matrice triangulaire. (On donnera une matrice de passage convenable.)*
> ❧ *Résoudre le système différentiel suivant.*
> $$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

❧ **Version longue (en récitant le cours)**

Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il n'y a que trois possibilités :

— ou bien son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (soit $\Delta > 0$) ;

— ou bien il admet une racine double (soit $\Delta = 0$) ;

— ou bien il est irréductible (soit $\Delta < 0$).

Autrement dit :

— ou bien cette matrice admet deux valeurs propres distinctes et, dans ce cas, elle est diagonalisable ;

— ou bien elle n'a qu'une seule valeur propre :
$$\chi_A = (X - \lambda)^2$$
et dans ce cas,
  — ou bien cette matrice est une homothétie : $A = \lambda I_2$ (ce n'est pas le cas ici) ;
  — ou bien cette matrice est trigonalisable mais pas diagonalisable ;

— ou bien elle n'est même pas trigonalisable.

Ici, le polynôme caractéristique de A est égal à
$$X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$
et par conséquent A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

❧ **Version courte**

La trace de A est égale à 2. Comme la trace est aussi la somme des deux valeurs propres, cela *suggère* d'étudier le cas $\lambda = 1$. Or la matrice
$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
n'est pas inversible, donc 1 est bien valeur propre de A.

D'après la trace, 1 est donc la seule valeur propre de A, ce qui prouve que A est trigonalisable (le polynôme caractéristique est scindé et admet 1 comme racine double), mais pas diagonalisable (sinon, A serait semblable à I_2 et donc en fait égale à I_2).

❧ D'après l'expression de $A - I_2$,
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I_2) \quad \text{et} \quad (A - I_2)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
On est ainsi conduit à poser
$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Il est clair que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et comme
$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

REMARQUE.— On sait que $(A - I_2)^2 = 0_2$ et donc que

$$\operatorname{Im}(A - I_2) \subset \operatorname{Ker}(A - I_2).$$

Quel que soit le vecteur ε_2 choisi, on aura forcément

$$(A - I_2)(\varepsilon_2) \in \operatorname{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$$

et donc

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \alpha \cdot \varepsilon_1.$$

Si $\alpha = 0$, alors $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$, donc ε_2 serait proportionnel à ε_1 : ce serait un mauvais choix !

En conséquence, quel que soit ε_2 **non proportionnel** à ε_1, la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base et, d'après la formule du changement de base, la matrice A est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inutile de s'inquiéter, on est sûr de trouver une matrice de passage convenable !

❧ En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel à résoudre peut s'écrire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = A.X(t).$$

En posant alors

$$Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

cette équation équivaut à l'équation

$$Y'(t) = P^{-1}.X'(t) = P^{-1}AP.P^{-1}X(t) = U.Y(t)$$

c'est-à-dire au système suivant.

$$\begin{cases} u' - u = v \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une constante K_2 telle que

$$v(t) = K_2.e^t.$$

La première équation devient alors

$$u'(t) - u(t) = K_2.e^t$$

et il existe une constante K_1 telle que

$$u(t) = K_1.e^t + K_2.te^t.$$

(On rappelle qu'il existe une recette simple pour trouver une solution particulière de l'équation complète : il suffit de l'appliquer.)

En conclusion : (x, y) est une solution du système différentiel étudié si, et seulement si, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = P.Y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t + K_2 te^t \\ K_2 e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2K_1 - K_2).e^t + 2K_2.te^t \\ -K_1.e^t - K_2.te^t \end{pmatrix} \\
&= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_1 - K_2 \\ -K_1 \end{pmatrix} + te^t \cdot \begin{pmatrix} 2K_2 \\ -K_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

❧ **Variante**
On déduit de la formule du binôme que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = nU + (1-n)I_2.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A^n = nA + (1-n)I_2 = I_2 + n(A - I_2).$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot A^n = e^t \cdot I_2 + te^t \cdot (A - I_2)$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0) = e^t.X(0) + te^t.(A - I_2).X(0).$$