Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021

MP

Composition de Mathématiques

Le 17 février 2021 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est **à diagonale propre** lorsque son polynôme caractéristique vérifie la relation :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k}).$$

Bien entendu, toute matrice diagonale est une matrice à diagonale propre.

1. Démontrer qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

2. Donner un exemple simple de matrice à diagonale propre qui ne soit pas une matrice diagonale.

3. Soient α et β, deux nombres réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

soit une matrice à diagonale propre.

4. Soient X_1, X_2 et X_3, des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre $1/3$.

4. a. Calculer $\mathbf{P}(X_1 = X_2)$.

4. b. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (X_1 - X_2)(\omega) \\ 0 & 0 & (X_2 - X_3)(\omega) \\ (X_1 - X_2)(\omega) & (X_2 - X_3)(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que "La matrice B est à diagonale propre" est un événement et calculer la probabilité de cet événement.

5. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5. a. Exprimer $\mathrm{tr}({}^tAA)$ en fonction des coefficients $a_{i,j}$.

5. b. On suppose que A est une matrice symétrique réelle et on note

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

ses valeurs propres. Démontrer que

$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

5. c. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

❖ II – Problème ❖

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$, la base canonique de E. Pour tout couple $(P, Q) \in E$, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

2. Calculer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

3. Calculer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H, l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P(1) = 0$.

4. a. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Préciser sa dimension.

4. b. Soit φ, la projection orthogonale sur H. Calculer la matrice de φ relative à la base canonique $\mathscr{B}$.

❖ III – Problème ❖

Soient n, un entier supérieur à 2 et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

On pose

$$A = M - I_n \quad \text{et} \quad B = M - \frac{1}{2}I_n$$

et **on suppose que** $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$.

Nous allons étudier le sous-espace vectoriel

$$F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2).$$

1. Quelle est la dimension de F ? (On donnera une base de F.)

2. Démontrer que $M^k \in F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis que F est stable par multiplication.

3. Démontrer que $\mathscr{B} = (A, B)$ est une base de F. Calculer les coordonnées des matrices AB, BA, A^2 et B^2 relatives à la base $\mathscr{B}$.

4. Déterminer les matrices $T \in F$ telles que $T^2 = M$.

❖ IV – Problème ❖

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $a_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

On note f, la somme de la série entière $\sum a_n x^n$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n \leqslant a_0.$$

2. Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.

3. a. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{x^n}{n+2}.$$

3. b. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

est-elle définie ?

3. c. On note $\sum w_n x^n$ le produit de Cauchy des deux séries entières

$$\sum a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{n+2}.$$

Donner l'expression de w_n en fonction des a_k. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?

3. d. En déduire que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad f'(x) = f(x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right).$$

4. Exprimer $f(x)$, pour $0 \leqslant x < 1$, à l'aide des fonctions usuelles.

5. Comment choisir la valeur de a_0 pour que $f(x)$ soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Une telle variable X est-elle une variable aléatoire d'espérance finie ?

❖ V – Problème ❖

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

On note φ, la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur J.

2. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur J ?

3. Démontrer que la fonction φ est continue sur J et qu'elle tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$. (On donnera la valeur de ℓ.)

4. On pose

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

4. a. Quel est le signe de a ?

4. b. Démontrer que

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution I ❀ Matrices à diagonale propre

1. Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice A à diagonale propre est scindé et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, c'est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, la matrice A est trigonalisable.

2. Si $A = (a_{i,j})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors on sait que

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{i,i})$$

et la matrice A est donc à diagonale propre.

3. Si la matrice M est à diagonale propre, alors 0 est son unique valeur propre, son polynôme caractéristique est égal à X^3 et donc X^3 est un polynôme annulateur de A (encore le Théorème de Cayley-Hamilton).

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha(\alpha^2+\beta^2) \\ 0 & 0 & \beta(\alpha^2+\beta^2) \\ \alpha(\alpha^2+\beta^2) & \beta(\alpha^2+\beta^2) & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est donc une matrice à diagonale propre si, et seulement si,

$$\alpha(\alpha^2+\beta^2) = \beta(\alpha^2+\beta^2) = 0.$$

Comme α et β sont réels, cela équivaut au fait que

$$\alpha = \beta = 0.$$

(Ou bien $\alpha^2+\beta^2 = 0$ et dans ce cas, $\alpha = \beta = 0$; ou bien $\alpha^2+\beta^2 > 0$ et dans ce cas, $\alpha = \beta = 0$ [avec une contradiction en prime].)

La matrice M est donc une matrice à diagonale propre si, et seulement si, $\alpha = \beta = 0$.

4. a. On décompose $[X_1 = X_2]$ au moyen du système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1 :

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_1 = X_2] \cap [X_1 = k]$$
$$= \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X_1 = k] \cap [X_2 = k].$$

Comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on sait que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad [X_1 = k] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad [X_2 = k] \in \mathcal{A}.$$

Comme une tribu est stable par intersection finie ou dénombrable, on en déduit que $[X_1 = X_2] \in \mathcal{A}$.

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big[\mathbf{P}(X_1 = k)\big]^2$$

puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi.

Finalement,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - 4/9} = \frac{1}{5}.$$

4. b. D'après **3.**, la matrice $B(\omega)$ est à diagonale propre si, et seulement si, $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ et $X_2(\omega) = X_3(\omega)$. D'après la question précédente, $[X_1 = X_2]$ est bien un événement et, par analogie, $[X_2 = X_3]$ est aussi un événement.

Comme une tribu est stable par intersection finie, on en déduit que

$$[X_1 = X_2] \cap [X_2 = X_3] \in \mathcal{A}$$

et par conséquent, "La matrice B est à diagonale propre" est bien un événement.

❧ En s'inspirant de la question précédente,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]^3$$
$$= \frac{1}{27}\frac{27}{19} = \frac{1}{19}.$$

5. a. On a démontré en cours que

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

5. b. D'après le Théorème spectral, la matrice **symétrique réelle** A est diagonalisable et semblable à la matrice

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Par conséquent, la matrice $A^2 = {}^tAA$ est semblable à la matrice

$$D^2 = \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2).$$

Comme deux matrices semblables ont même trace, on en déduit que

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

5. c. D'après les deux questions précédentes, si A est une matrice symétrique réelle à diagonale propre, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 = 0$$

et comme les $a_{i,j}$ sont *réels*, on en déduit que

$$\forall\, i \neq j, \quad a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, la matrice A est diagonale.

La réciproque est évidente.

Par conséquent, une matrice symétrique réelle est une matrice à diagonale propre si, et seulement si, c'est une matrice diagonale.

Solution II ❀ Un produit scalaire

1. Il est clair que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Pour tout polynôme P,

$$\langle P | P \rangle = P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geqslant 0$$

et comme tous les termes sont positifs, cette somme est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul :

$$\langle P | P \rangle = 0 \implies P(1) = P'(1) = P''(1) = 0.$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$P = P(1) + (X-1)P'(1) + \frac{(X-1)^2}{2} \cdot P''(1) = 0$$

(puisque $\deg P \leqslant 2$ pour tout $P \in E$).

Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, c'est donc un produit scalaire.

2. Version futée : comme $\deg P \leqslant 2$, on l'a déjà vu,

$$\forall\, P \in E, \quad P = P(1) + P'(1) \cdot (X-1) + P''(1) \cdot \frac{(X-1)^2}{2}.$$

Le triplet

$$\big(P(1), P'(1), P''(1)\big)$$

constitue donc les coordonnées de P relatives à la base

$$\Big(1, (X-1), \frac{(X-1)^2}{2}\Big)$$

et, dans cette base, l'expression du produit scalaire est celle du produit scalaire canonique :

$$\langle P | Q \rangle = \begin{pmatrix} P(1) & P'(1) & P''(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(1) \\ Q'(1) \\ Q''(1) \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que cette base est une base orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

❧ **Version pédestre :** on part de la base canonique $(1, X, X^2)$ et on applique l'algorithme de Gram-Schmidt.

Comme $\langle 1 | 1 \rangle = 1$, on conserve 1 comme premier vecteur de base.

Ensuite, on projette X sur la droite $\mathbb{R} \cdot 1$:

$$X = (X - \langle 1 | X \rangle \cdot 1) + (\langle 1 | X \rangle \cdot 1)$$

et comme $\langle 1 | X \rangle = 1$, le deuxième vecteur de base doit être proportionnel à $(X-1)$. Mais

$$\langle X-1 | X-1 \rangle = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

donc on prend $(1, X-1)$ comme base orthonormée du plan $\mathbb{R}_1[X]$.

Enfin, on projette X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ grâce à la base orthonormée qu'on vient de trouver :

$$X^2 = \big[X^2 - p_1(X^2)\big] + p_1(X^2)$$

avec

$$p_1(X^2) = \langle 1 | X^2 \rangle \cdot 1 + \langle X-1 | X^2 \rangle \cdot (X-1).$$

Or

$$\langle 1 | X^2 \rangle = 1 \times 1^2 + 0 \times (2 \times 1) + 0 \times 2 = 1$$
$$\langle X-1 | X^2 \rangle = 0 \times 1^2 + 1 \times (2 \times 1) + 0 \times 2 = 2$$

donc

$$p_1(X^2) = 1 + 2 \cdot (X-1) = 2X - 1.$$

Le troisième vecteur de notre base sera donc proportionnel à

$$X^2 - (2X-1) = (X-1)^2.$$

Comme

$$\langle (X-1)^2 | (X-1)^2 \rangle = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4,$$

on en déduit qu'une base orthonormée de E pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est constituée par

$$\Big(1, (X-1), \frac{(X-1)^2}{2}\Big).$$

(Il faut diviser le troisième vecteur *par sa norme*, pas par le carré de sa norme !)

3. Le plus simple est de projeter U sur la base orthonormée qu'on vient de calculer. Comme cette base est échelonnée en degré, on peut mener les calculs de proche en proche.

$$\begin{aligned} U &= (X-1)^2 + 2X - 5 \\ &= 2 \cdot \frac{(X-1)^2}{2} + 2 \cdot (X-1) - 3 \end{aligned}$$

Le projeté orthogonal de U sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$2(X-1) - 3$$

et la distance de U au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$\Big\| 2 \cdot \frac{(X-1)^2}{2} \Big\| = 2$$

puisque $(X-1)^2/2$ est un vecteur unitaire.

❧ Si on n'a pas réussi à calculer une base orthonormée, on peut quand même déterminer le projeté orthogonal $p_1(U)$ de U sur $\mathbb{R}_1[X]$. Il s'agit d'un polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$:

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \quad p_1(U) = aX + b$$

tel que $U - p_1(U)$ soit orthogonal à 1 et à X :

$$\begin{cases} a \langle X | 1 \rangle + b \langle 1 | 1 \rangle = \langle U | 1 \rangle \\ a \langle X | X \rangle + b \langle 1 | X \rangle = \langle U | X \rangle \end{cases}$$

et la distance cherchée est la *racine carrée* de

$$\langle U | U - p_1(U) \rangle = \langle U | U \rangle - a \langle U | X \rangle - b \langle U | 1 \rangle.$$

Il reste à calculer les six produits scalaires et à résoudre le système d'équations, ce qui ne devrait pas poser de difficulté. Pour info :

$$\begin{array}{lll} \langle 1 | 1 \rangle = 1 & \langle 1 | X \rangle = 1 & \langle X | X \rangle = 2 \\ \langle 1 | U \rangle = -3 & \langle X | U \rangle = -1 & \langle U | U \rangle = 17 \end{array}$$

Remarque.— La première méthode ne paraît plus rapide que parce qu'on avait *déjà* calculé une base orthonormée !

4. a. Par définition, H est le noyau de la forme linéaire

$$f = [P \mapsto P(1)]\,.$$

Comme $f(1) = 1 \neq 0$, ce n'est pas la forme linéaire nulle, donc H est un hyperplan de E : c'est un sous-espace vectoriel de dimension $3 - 1 = 2$.

4. b. On a calculé une base orthonormée de E et cette base orthonormée va encore nous être utile : manifestement,

$$H = \mathrm{Vect}\Big((X-1), \frac{(X-1)^2}{2}\Big) \quad \text{et} \quad H^\perp = \mathbb{R}\cdot 1.$$

La projection orthogonale sur H est donc définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \varphi(P) = P - \langle\, 1 \,|\, P\,\rangle \cdot 1 = P - P(1)$$

et on a

$$\forall\, P \in E, \quad P = \underbrace{\big[P - P(1)\big]}_{\in H} + \underbrace{P(1)}_{\in H^\perp}.$$

On calcule maintenant $p_H(1)$, $p_H(X)$ et $p_H(X^2)$ et on trouve que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— Cette matrice n'est pas symétrique : elle représente bien une projection orthogonale, *mais pas dans une base orthonormée*.

REMARQUE.— Comme on l'a vu, il suffit de trouver un vecteur de $H^\perp$ pour caractériser φ, on pouvait donc traiter cette question sans avoir trouvé la base orthonormée.

Solution III ❀ Algèbre de matrices

1. Le sous-espace F est engendré par 3 vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 3.

De plus,

$$M^2 = \frac{-1}{2}I_n + \frac{3}{2}M \in \mathrm{Vect}(I_n, M)$$

donc F est engendré par I_n et M, donc $\dim F \leqslant 2$.

Si M était proportionnelle à I_n, alors il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$ et λ serait la seule valeur propre de M. Or, par hypothèse, le polynôme

$$2X^2 - 3X + 1 = (2X-1)(X-1)$$

est un polynôme annulateur de M et les valeurs propres de M sont nécessairement des racines de ce polynôme. Comme $A \neq 0_n$ et que $B \neq 0_n$, on en déduit que la matrice M n'est pas une homothétie et donc que M n'est pas proportionnelle à I_n.

Ainsi, $\dim F = 2$ et (I_n, M) est une base de F.

2. Par construction, M^0, M^1 et M^2 appartiennent à F.

Supposons que, pour un entier $k \geqslant 2$, la matrice M^k appartienne à F. Alors il existe deux réels a_k et b_k tels que

$$M^k = a_k I_n + b_k M$$

donc

$$M^{k+1} = a_k M + b_k M^2 = \frac{-b_k}{2}I_n + \Big(a_k + \frac{3}{2}b_k\Big)\cdot M \in F.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $M^k \in F$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

❧ Soient N_1 et N_2, deux matrices de F : d'après la question précédente, il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$N_1 = aI_n + bM \quad \text{et} \quad N_2 = cI_n + dM.$$

Donc

$$N_1N_2 = ac\cdot I_n + (ad+bc)\cdot M + bd\cdot M^2 \in F$$

et F est bien stable par multiplication.

REMARQUE.— Comme F est un sous-espace de l'algèbre $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, qu'il est stable par multiplication et qu'il contient l'élément unité I_n, c'est en fait une *sous-algèbre* de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Il est clair que A et B appartiennent à F et

$$I_n = 2\cdot(B - A) \quad \text{et} \quad M = 2\cdot B - A$$

donc (A, B) engendre F.

Comme $\mathscr{B} = (A, B)$ est une famille génératrice de <u>deux</u> vecteurs de F, espace vectoriel de dimension <u>deux</u>, c'est une base de F.

❧ Tout d'abord,

$$AB = BA = \frac{1}{2}\cdot(2M^2 - 3M + I_n) = 0_n$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(AB) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(BA) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part,

$$A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{-1}{2}\cdot M + \frac{1}{2}\cdot I_n$$

$$B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}\cdot M - \frac{1}{4}\cdot I_n$$

donc

$$A^2 = \frac{-1}{2}\cdot A \quad \text{et} \quad B^2 = \frac{1}{2}\cdot B.$$

Finalement,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(A^2) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(B^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour toute matrice $T \in F$, il existe deux réels x et y tels que

$$T = x\cdot A + y\cdot B$$

et d'après la question précédente

$$T^2 = x^2\cdot A^2 + y^2\cdot B^2 = \frac{-x^2}{2}\cdot A + \frac{y^2}{2}\cdot B.$$

Or

$$M = (-1)\cdot A + 2\cdot B$$

et cette décomposition est unique (puisque (A, B) est une <u>base</u> de F).

Par conséquent, la matrice $T \in F$ vérifie $T^2 = M$ si, et seulement si,

$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad y^2 = 4.$$

Il y a donc (exactement) quatre solutions :

$$T = (\pm 1)\cdot A + (\pm 2)\cdot B.$$

Solution IV ❀ Séries entières

1. Nous allons démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 < a_k \leqslant a_0 \tag{HR}$$

ce qui prouvera que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n \leqslant a_0.$$

- La propriété est évidente pour $n = 0$.
- On suppose que (HR) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$$

est strictement positif comme somme de réels strictement positifs.

D'autre part,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{a_0}{n-k+2} \leqslant \frac{a_0}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on en déduit que

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \times (n+1) \cdot \frac{a_0}{2} \leqslant \frac{a_0}{2} \leqslant a_0.$$

En combinant l'encadrement trouvé avec (HR), on obtient que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad 0 < a_k \leqslant a_0$$

et donc que la propriété (HR) est héréditaire.

Cette propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le résultat est ainsi établi.

2. D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc

$$a_n x^n = \mathcal{O}(x^n).$$

Or la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument pour tout $|x| < 1$, donc, par comparaison, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $|x| < 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1.

3. a. Pour $x > 0$, on pose

$$u_n = \frac{x^n}{n+2}$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+3} \cdot x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

D'après la règle de D'Alembert,
– si $x > 1$, la série $\sum u_n x^n$ diverge grossièrement ;
– si $0 < x < 1$, la série $\sum u_n x^n$ converge absolument.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1.

3. b. D'après la question précédente, la somme de la série $\sum u_n$ est définie au moins pour $|x| < 1$ et au plus pour $|x| \leqslant 1$.

Pour $x = 1$, la série diverge par comparaison avec la série harmonique (série divergente de terme général positif).

Pour $x = -1$, la série converge d'après le Critère spécial des séries alternées (car $\frac{1}{n+2}$ tend vers 0 en décroissant).

Par conséquent, la somme est définie si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$.

3. c. Par définition, le produit de Cauchy des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ est la série entière $\sum w_n x^n$ avec

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}.$$

- On étudie ici le produit de Cauchy de deux séries entières dont le rayon de convergence est au moins égal à 1. Par conséquent, le rayon de convergence du produit de Cauchy est lui aussi supérieur ou égal à 1.

Remarque.— D'après le cours, le rayon de convergence de la série entière $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ est *égal* au rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et donc au moins égal à 1.

3. d. D'après le cours, puisque le rayon de convergence du produit de Cauchy est au moins égal à 1,

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = f(x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right).$$

On a aussi remarqué que $w_n = (n+1)a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Comme le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1 et donc strictement positif, sa somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ (au moins) et

$$\forall\, |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right] = f'(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = f(x) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right).$$

4. D'après la première question, $f(x) > 0$ pour tout $0 \leqslant x < 1$ et d'après la question précédente,

$$\forall\, x \in]-1, 1[, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-x - \ell n(1-x)}{x^2}.$$

On primitive par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{x^2}\cdot \ln(1-x)\,dx &= \frac{1}{x}\cdot \ln(1-x)\,dx - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{1-x}\,dx\\ &= \frac{\ln(1-x)}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \frac{\ln(1-x)}{x} + \ln x - \ln(1-x)\end{aligned}$$

et on obtient

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1-x}{x}\cdot\ln(1-x) = \Big(\frac{1}{x}-1\Big)\cdot\ln(1-x).$$

La primitive qu'on vient de calculer tend vers -1 au voisinage de 0, elle est donc égale à

$$\ln\frac{f(x)}{f(0)} - 1$$

et finalement,

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1,\quad f(x) = a_0\cdot e\cdot(1-x)^{(1-x)/x}.$$

5. Si la fonction f est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X, alors elle est continue sur $[0,1]$ et tend vers 1 au voisinage de $x=1$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 1}\ln\frac{f(x)}{f(0)} - 1 = \ln\frac{1}{f(0)} - 1$$

et il faut donc que

$$\ln\frac{1}{f(0)} - 1 = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} = 0$$

et donc que $a_0 = f(0) = e^{-1}$.

☙ Dans ce cas, X est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la fonction génératrice est dérivable en $x=1$. Or

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$$

et comme $f(x)$ tend vers 1 au voisinage de 1, on en déduit que $f'(x)$ tend vers $+\infty$: d'après l'égalité des accroissements finis,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = +\infty$$

donc la fonction f n'est donc pas dérivable en $x=1$ et X n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie.

REMARQUE.— On pourrait aussi passer par un développement limité pour conclure. On pose $x = 1-h$ (avec h proche de 0) :

$$\begin{aligned}(1-x)^{(1-x)/x} &= \exp\Big[\frac{h}{1-h}\,\ln h\Big]\\ &= \exp\big[h\ln h\cdot(1+h+o(h))\big]\\ &= \exp\big[h\ln h + o(h\ln h)\big]\\ &= 1 + h\ln h + o(h\ln h).\end{aligned}$$

On retrouve ainsi d'une part que

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{(1-x)/x} = 1$$

et d'autre part que

$$\frac{(1-x)^{(1-x)/x}-1}{x-1} \underset{h\to 0}{\sim} -\ln h$$

et donc que le taux d'accroissement tend vers $+\infty$.

Solution V ❁ Série de fonctions

1. Pour tout $x\in J$, il est clair que la suite de terme général

$$\frac{1}{\sqrt{1+nx}}$$

tend vers 0 en décroissant. D'après le Critère spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ converge donc.

On a démontré que la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait simplement sur l'intervalle J.

2. Chaque fonction $|f_n|$ est clairement décroissante sur J, donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in J}\big|f_n(x)\big| = \big|f_n(1)\big| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/2}}$$

donc la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente et par conséquent la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Puisqu'on a prouvé la convergence simple à l'aide du Critère spécial des séries alternées, on sait que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in J,\quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big| \leqslant \big|f_{n+2}(x)\big|$$

et comme la fonction $|f_{n+2}|$ est décroissante, on en déduit que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in J,\quad \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

On a trouvé un majorant de la valeur absolue du reste qui est indépendant de $x\in J$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur J.

☙ Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur J, on en déduit que la somme φ est continue sur J.

☙ Toutes les fonctions f_n tendent vers une limite finie ℓ_n au voisinage de $+\infty$ avec

$$\ell_0 = 1 \quad\text{et}\quad \forall\, n\geqslant 1,\quad \ell_n = 0.$$

Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$, on déduit du Théorème de la double limite que φ tend vers une limite finie au voisinage de $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\ell_n = 1.$$

4. a. On peut à nouveau appliquer le Critère spécial des séries alternées. Ce théorème nous dit en particulier que la somme de la série (= le reste d'ordre 0) est du signe du premier terme, donc

$$a < 0.$$

4. b. On remarque que $\ell = f_0(x)$ pour tout $x \in J$ et par conséquent

$$\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \Big[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}}\Big].$$

Version élémentaire : on fait apparaître la quantité conjuguée pour simplifier les racines carrées. Pour tout $x \in J$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{nx}\sqrt{1+nx}(\sqrt{nx}+\sqrt{1+nx})} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}x^{3/2}}$$

donc, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in J$,

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \Big[\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}}\Big]\Big| \leqslant \frac{\zeta(3/2)}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$$

ce qui prouve bien que

$$\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^{3/2}}\Big).$$

Version savante : on pose

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u}}.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall\, u \geqslant 0, \quad g'(u) = \frac{-1}{2(1+u)^{3/2}}.$$

En particulier, $\|g'\|_\infty = 1/2$ et d'après l'Inégalité des accroissements finis, la fonction g est $1/2$-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

On remarque alors que

$$\frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} = \frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \big(g(0) - g(1/nx)\big)$$

et on retrouve ainsi que

$$\forall\, x \in J,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{nx}} - \frac{1}{\sqrt{1+nx}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{nx}.$$

On peut alors conclure comme plus haut.