

## Composition de Mathématiques

Le 12 février 2020 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Les calculatrices sont interdites.  
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

### ❖ Problème ❖

Dans tout le problème,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  désigne un espace probabilisé. On note  $\mathbf{P}(A)$  la probabilité d'un événement  $A$  et on note  $\mathbf{E}(X)$  l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ .

#### Partie A. Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire  $X$  réelle à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$  et pour tout  $m \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbf{E}(X) \leq m - 1 + n \mathbf{P}(X \geq m).$$

2. À l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!.$$

#### Partie B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , une suite réelle bornée. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $U_n = \{u_k; k \geq n\}$ .

On définit les suites  $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\bar{u} = (\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \bar{u}_n = \sup(U_n).$$

3. Justifier que  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Étant données deux suites réelles  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , on dit que  $v$  est **plus petite** que  $w$  (ou, si on préfère, que  $w$  est **plus grande** que  $v$ ) si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $v_n \leq w_n$ . On note alors  $v \preceq w$ .

4. Montrer que  $\bar{u}$  est la plus petite suite (au sens de  $\preceq$ ) qui est décroissante et plus grande que  $u$ .

Montrer de même que  $\underline{u}$  est la plus grande suite (au sens de  $\preceq$ ) qui est croissante et plus petite que  $u$ .

Dans toute la suite du problème, on appelle **limite inférieure**  $\underline{\lim}$  et **limite supérieure**  $\overline{\lim}$  les limites suivantes :

$$\underline{\lim} u_n = \lim \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim} u_n = \lim \bar{u}_n.$$

5. Si  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une autre suite réelle bornée plus grande que  $u$ , comparer les limites de  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$ .

6. Montrer que  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont adjacentes si, et seulement si,  $u$  converge.

En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites  $u$ ,  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  ?

On dit qu'une suite réelle  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est **sous-additive** si pour tous  $i, j$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $u_{i+j} \leq u_i + u_j$ .

Dans le reste de cette partie, on ne suppose plus que la suite  $u$  est bornée, mais on suppose que  $u$  est positive et sous-additive.

7. Soient  $m$  et  $n$ , deux entiers naturels non nuls tels que  $m \geq 2n$ . On note  $q$ , le quotient et  $r$ , le reste de la division euclidienne de  $m$  par  $n$ . Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

8. En déduire que la suite  $(u_{m/m})_{m \in \mathbb{N}^*}$  est bornée, puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}.$$

9. En conclure que la suite  $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

#### Partie C. Une application probabiliste

Soit  $x$ , un nombre réel et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Y_n$ , la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

10. Montrer que si  $\mathbf{P}(X_1 < x) = 1$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(Y_n < x) = 1$  et que si  $\mathbf{P}(X_1 \geq x) > 0$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{P}(Y_n \geq x) > 0$ .

11. Soient  $m$  et  $n$ , deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante

$$\left( [Y_m \geq x] \cap \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m+n} X_k \geq x \right] \right) \subset [Y_{m+n} \geq x]$$

et en déduire l'inégalité

$$\mathbf{P}(Y_{n+m} \geq x) \geq \mathbf{P}(Y_m \geq x) \mathbf{P}(Y_n \geq x).$$

12. Démontrer la convergence de la suite

$$\left( (\mathbf{P}(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

**Partie D. Le théorème de Erdős-Szekeres**

Si  $r$  est un entier naturel non nul, on note  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ , une liste de nombres réels de longueur  $r$ ; cette liste est **croissante** si  $\ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_r$ , **décroissante** si  $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_r$ .

Une liste  $\ell'$  de longueur  $p \in \{1, \dots, r\}$  est **extraite** de  $\ell$  s'il existe  $p$  indices  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$  dans  $\{1, \dots, r\}$  tels que  $\ell' = (\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_p})$ .

Soit  $p$  et  $q$ , deux entiers naturels non nuls et  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{pq+1})$ , une liste de longueur  $pq + 1$  de nombres réels deux à deux distincts qui représentent les valeurs de  $pq + 1$  jetons numérotés  $1, 2, \dots, pq + 1$ .

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton numéro 1 de valeur  $a_1$  débute la première pile ;
- si  $a_2 > a_1$ , alors on pose le jeton numéro 2 de valeur  $a_2$  sur le jeton numéro 1 ;  
*sinon* on crée une nouvelle pile avec ce jeton numéro 2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton numéro  $k$  de valeur  $a_k$ , on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que  $a_k$  est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ;  
*sinon* on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes.

10		
9	8	
7	6	
4	3	
1	2	5

13. À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre  $s$  de piles, montrer qu'à l'issue de ce processus, pour tout jeton de valeur  $z$  de la dernière pile, il existe une liste  $b = (b_1, \dots, b_s)$  de réels extraite de la liste  $a$  vérifiant :

- $b$  est décroissante de longueur  $s$  ;
- pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , le jeton numéro  $i$  de valeur  $b_i$  est dans la  $i$ -ième pile en partant de la gauche ;
- $b_s = z$ .

Par exemple, avec la liste  $a = (1, 4, 2, 3, 7, 6, 5, 9, 10, 8)$  on a extrait une liste  $b = (7, 6, 5)$ .

14. En déduire que la liste  $a$  admet au moins une liste extraite croissante de longueur  $p + 1$  ou une liste extraite décroissante de longueur  $q + 1$ .

**Partie E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire**

Soit  $n$ , un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $S_n$ , l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Chaque élément  $\sigma$  de  $S_n$  est noté par la liste de ses  $n$  images  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ .

Soit  $B$ , une variable aléatoire à valeurs dans  $S_n$  de loi uniforme, c'est-à-dire que : pour tout  $\sigma \in S_n$ , on a  $\mathbf{P}(B = \sigma) = 1/\text{Card}(S_n)$ .

On définit la variable aléatoire  $A$  à valeurs dans  $S_n$  en posant pour tout  $\omega \in \Omega$

$$A(\omega) = (B(\omega)(1), \dots, B(\omega)(n)).$$

On note également, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$ .

Enfin, on considère les variables aléatoires  $C_n$  et  $D_n$  définies par :

- $C_n$  est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de  $A$  ;
- $D_n$  est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de  $A$ .

15. Les variables aléatoires réelles  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont-elles mutuellement indépendantes ?

16. Soient  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $s = (s_1, \dots, s_k)$ , une liste croissante de longueur  $k$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ .

On note  $A^s$ , l'événement : "la liste  $(A_{s_1}, \dots, A_{s_k})$  est croissante".

Montrer que  $\mathbf{P}(A^s) = 1/k!$ .

17. Montrer que  $C_n$  et  $D_n$  ont même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question [14], que

$$\mathbf{E}(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18. Démontrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\mathbf{P}(C_n \geq k) \leq \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19. Soient  $n$ , un entier naturel non nul et  $\alpha$ , un réel strictement supérieur à 1.

Justifier qu'il existe un entier naturel non nul  $k$  tel que  $k - 1 < \alpha e \sqrt{n} \leq k$ . A l'aide du résultat de la question [2], déduire de la question précédente que

$$\mathbf{P}(C_n \geq \alpha e \sqrt{n}) \leq \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{2\alpha e \sqrt{n}}.$$

20. En déduire qu'il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tendant vers 0 telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-1/4})e + \varepsilon_n.$$

En conclure que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$$

existe et est majorée par  $e$ .