Composition de Mathématiques

Le 12 février 2020 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ I – Problème ❖

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $[-1, 1]$ et une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi que X.

On note :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Démontrer que X est une variable aléatoire d'espérance finie.

On suppose désormais que X est une variable aléatoire *centrée* (quitte à remplacer X par $X - \mathbf{E}(X)$).

2. Énoncer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Démontrer cette inégalité dans le cas où Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

3. Démontrer que

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

4. Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{[\mathbf{E}(e^{tX})]^n}{e^{nt\varepsilon}}.$$

5. Soit $a > 1$. Démontrer que la fonction

$$g_a = \left[x \mapsto \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x\right]$$

est positive sur $[-1, 1]$.

☞ *On pourra invoquer un argument de convexité.*

6. En déduire que

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

7. En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t$ pour tout $t > 0$.

8. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp(t^2/2)$ pour tout $t > 0$.

9. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2)\right]$$

atteint un minimum (en un point qu'on précisera).

10. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.

12. Soient $\varepsilon > 0$ fixé et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} [|S_m| > \varepsilon].$$

Démontrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est un événement négligeable.

13. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit $\Omega_k \subset \Omega$ par

$$\omega \in \Omega_k \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Démontrer que chaque Ω_k est un événement. Exprimer l'ensemble A défini par

$$\omega \in A \iff \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$$

au moyen des événements Ω_k. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.

❖ II – Problème ❖

Partie A. Préliminaires

Soit n, un entier naturel non nul.

1. Soient P et Q, deux polynômes non nuls, à coefficients complexes.

1. a. Démontrer que : si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux.

☞ *On pourra raisonner par l'absurde.*

1. b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que : si P et Q divisent un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$, alors le produit PQ divise aussi R.

2. Soit $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q \in \mathbb{R}(X)$ définis par

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i \quad \text{et} \quad Q = \frac{P'}{P}.$$

Démontrer par récurrence que
$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}.$$

Partie B. Interpolation de Hermite

Dans cette partie, on considère $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle de longueur strictement positive ; p, un entier naturel non nul ; $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, une famille d'éléments de I deux à deux distincts et enfin $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, deux familles de réels.

3. Dans cette question, on définit le **polynôme interpolateur de Hermite**.

3. a. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant une formule de Taylor, démontrer que : si $P(a) = P'(a) = 0$, alors $(X-a)^2$ divise P.

3. b. À l'aide des résultats du **1.**, démontrer que l'application
$$\varphi : \mathbb{R}_{2p-1}[X] \to \mathbb{R}^{2p}$$
définie par
$$\varphi(P) = \big(P(x_1), \dots, P(x_p), P'(x_1), \dots, P'(x_p)\big)$$
est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

3. c. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p, \quad P_H(x_i) = a_i \quad \text{et} \quad P_H'(x_i) = b_i.$$
Le polynôme P_H est appelé *polynôme interpolateur de Hermite*.

4. Déterminer le polynôme interpolateur de Hermite pour
$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ b_1 = -1,\ b_2 = 2.$$
(On fera les calculs au brouillon et on s'abstiendra de porter le détail de ces calculs sur la copie.)

5. Pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose
$$Q_i = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq i}} \left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2.$$

5. a. Soient $1 \leqslant i, k \leqslant p$. Calculer $Q_i(x_k)$. Vérifier que $Q_i'(x_k) = 0$ pour $k \neq i$ et
$$Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq i}} \frac{2}{x_i - x_j}.$$
☞ *On pourra utiliser le résultat du* **2.**

5. b. Démontrer que le polynôme
$$P = \sum_{i=1}^{p} \Big[\Big(1 - Q_i'(x_i)(X-x_i)\Big)\, a_i + (X-x_i)\, b_i\Big]\, Q_i$$
est le polynôme interpolateur de Hermite.

5. c. Utiliser cette formule pour vérifier le résultat du **4.**

Partie C. Polynômes orthogonaux de Hermite

On considère la famille de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = XH_n - H_n'.$$

6. Démontrer que H_n est un polynôme unitaire de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Démontrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1}' = (n+1)H_n.$$

8. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$
On *admet* que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

8. a. Soient P et Q, deux polynômes à coefficients réels. Démontrer que l'intégrale $\langle P \,|\, Q \rangle$ définie par
$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\,dx$$
est convergente.

8. b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans la suite du sujet, l'espace $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire.

9. a. Vérifier que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}\big[H_n(x)f(x)\big] = -H_{n+1}(x)f(x)$$
et en déduire par récurrence que
$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle P \,|\, H_n \rangle = \left\langle P^{(n)} \,\middle|\, H_0 \right\rangle.$$

9. b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

9. c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. d. Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3$. Calculer les polynômes H_1, H_2 et H_3, puis les quatre réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que
$$P = \sum_{i=0}^{3} a_i H_i.$$

9. e. En déduire la distance du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.

10. Dans cette dernière question, on étudie les racines du polynôme H_n. On note p, le nombre de racines réelles de H_n dont la multiplicité est impaire et on note
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_p$$
ces racines. On pose alors
$$S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)$$
avec $S = 1$ au cas où $p = 0$.

10. a. Démontrer que : si $p < n$, alors $\langle S \,|\, H_n \rangle = 0$.

10. b. Démontrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x)H_n(x) \geqslant 0.$$

10. c. En déduire que H_n possède exactement n racines réelles distinctes.

Solution I ❁ Loi des grands nombres

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$, la famille, finie ou dénombrable, des valeurs prises par la variable aléatoire discrète X.

Par *définition*, X est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la famille

$$\big(x_i\,\mathbf{P}(X = x_i)\big)_{i\in I}$$

est sommable. Or $x_i \in [-1, 1]$ pour tout $i \in I$ par hypothèse, donc

$$\forall\, i \in I, \quad |x_i|\,\mathbf{P}(X = x_i) \leqslant \mathbf{P}(X = x_i).$$

Mais X est une variable aléatoire discrète, donc la famille $([X = x_i])_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints. Comme $\mathbf{P}$ est σ-additive, on en déduit que la famille $(\mathbf{P}(X = x_i))_{i\in I}$ est sommable et, d'après le Théorème de comparaison, la famille $(x_i\,\mathbf{P}(X = x_i))_{i\in I}$ est sommable elle aussi.

Donc X est bien une variable aléatoire d'espérance finie.

REMARQUE.— La même démonstration établit que *toute variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.*

2. Inégalité de Markov :

Soit Y, *une variable aléatoire positive d'espérance finie. Pour tout* $\alpha > 0$,

$$\mathbf{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Y)}{\alpha}.$$

☙ Démonstration dans le cas où Y prend un nombre fini de valeurs : on note $(y_i)_{0\leqslant i<n}$, la famille des valeurs (positives) prises par Y et on fixe $\alpha > 0$.

Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{0\leqslant i<n} y_i\,\mathbf{P}(Y = y_i)\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i<\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y = y_i) + \sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y = y_i).\end{aligned}$$

Si $y_i < \alpha$, alors $y_i\,\mathbf{P}(Y = y_i) \geqslant 0$ car Y est à valeurs positives ; si, au contraire, $y_i \geqslant \alpha$, alors

$$y_i\,\mathbf{P}(Y = y_i) \geqslant \alpha\,\mathbf{P}(Y = y_i)$$

car $\mathbf{P}$ est à valeurs positives. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Y) \geqslant \alpha \sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}} \mathbf{P}(Y = y_i) = \alpha\,\mathbf{P}(Y \geqslant \alpha)$$

et l'inégalité de Markov en découle (puisque $\alpha > 0$).

3. Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors $|X|$ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et comme $|X|$ est à valeurs positives, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov.

4. Comme $nt > 0$ et que la fonction exp est strictement croissante, alors

$$\begin{aligned}\forall\,\omega\in\Omega, \quad S_n(\omega) \geqslant \varepsilon &\iff ntS_n(\omega) \geqslant nt\varepsilon\\ &\iff \exp[ntS_n(\omega)] \leqslant \exp(nt\varepsilon).\end{aligned}$$

(NB : il faut insister sur le *strictement* pour justifier les équivalences !)

On en déduit que

$$[S_n \geqslant \varepsilon] = \big[e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}\big]$$

et donc que (par croissance de $\mathbf{P}$)

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}).$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et bornées. D'après le Théorème des coalitions, les variables aléatoires $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots, e^{tX_n}$ sont elles aussi indépendantes et bornées. Or

$$e^{ntS_n} = e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n},$$

donc e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie et, par indépendance des facteurs,

$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(e^{tX_i}) = \big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n$$

puisque les variables X_i ont toutes même loi que X.

Comme e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov et en déduire que

$$\mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{\big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

et donc enfin que

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

5. Pour $a > 0$, on sait que $a^x = e^{x\,\ell n\,a}$. Donc g_a est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$g_a''(x) = -a^x(\ell n\, a)^2 < 0$$

donc la fonction g_a est concave sur $[-1, 1]$.

Or $g_a(1) = a - a = 0$ et $g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0$, donc la corde qui joint les points d'abscisses ± 1 sur le graphe de g_a est un segment de l'axe des abscisses. Comme g_a est concave, son graphe est au-dessus de ses cordes, donc

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad g_a(x) \geqslant 0.$$

6. Pour $t > 0$, on pose $a = e^t > 1$ et

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} - e^{tx} \geqslant 0$$

d'après la question précédente.

7. Par hypothèse, $x = X(\omega) \in [-1, 1]$ pour tout $\omega \in \Omega$ et d'après la question précédente,

$$\forall\,\omega \in \Omega, \quad e^{tX(\omega)} \leqslant \operatorname{ch} t + X(\omega)\operatorname{sh} t.$$

Les variables X et e^{tX} sont d'espérance finie (elles sont bornées toutes les deux par hypothèse) et l'espérance conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t + \mathbf{E}(X)\ \operatorname{sh} t = \operatorname{ch} t$$

puisque X est centrée par hypothèse.

8. Il s'agit en fait de vérifier que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 2^k k! \leqslant (2k)!$$

c'est-à-dire

$$2^k \leqslant \prod_{i=k+1}^{2k} i = \prod_{i=1}^{k} (k+i).$$

Pour $k \geqslant 1$, on a de chaque côté un produit de k facteurs ; à gauche, tous les facteurs sont égaux à 2 ; à droite, les facteurs sont tous supérieurs à $(k+i) \geqslant (k+1) \geqslant 2$. Par conséquent, l'inégalité est démontrée pour $k \geqslant 1$.

Enfin, pour $k = 0$, l'inégalité est évidente : elle se réduit à $1 \leqslant 1$...

Donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^k.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc, d'après la question précédente, que

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp(t^2/2).$$

9. Posons

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2).$$

Il est clair que f_n est strictement positive et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f_n'(t) = n(t-\varepsilon) f_n(t)$$

donc $f_n'(t)$ est du signe de $(t-\varepsilon)$.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, \varepsilon]$ et strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. Cette fonction atteint donc un minimum en $t = \varepsilon$ et ce minimum est égal à

$$f_n(\varepsilon) = \exp(-n\varepsilon^2/2).$$

10. D'après **4.** et **7.**,

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant f_n(t).$$

Le minorant (à gauche) étant indépendant de t, on peut passer à la borne inférieure par rapport à $t > 0$ et obtenir :

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant f_n(\varepsilon) = \exp(-n\varepsilon^2/2).$$

❧ La propriété $|S_n(\omega)| \geqslant \varepsilon$ est vraie si $S_n(\omega) \geqslant \varepsilon$ ou si $S_n(\omega) \leqslant -\varepsilon$. Par conséquent,

$$[|S_n| \geqslant \varepsilon] = [S_n \geqslant \varepsilon] \sqcup [S_n \leqslant -\varepsilon] = [S_n \geqslant \varepsilon] \sqcup [-S_n \geqslant \varepsilon]$$

et donc, par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbf{P}(-S_n \geqslant \varepsilon).$$

Les variables aléatoires $-X_1, \dots, -X_n$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$: elles sont discrètes, à valeurs dans $[-1, 1]$, indépendantes (Théorème des coalitions) et toutes de même loi (celle de $-X$, qui est *a priori* différente de celle de X).

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}\big((-X_1) + \cdots + (-X_n) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$$

et finalement

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. La majoration précédente peut aussi s'écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2q^n$$

avec $0 < q = \exp(-\varepsilon^2/2) < 1$. Par comparaison avec une série géométrique, la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$ est donc (absolument) convergente.

❧ Il est par ailleurs clair que : si $|S_n(\omega)| > \varepsilon$, alors $|S_n(\omega)| \geqslant \varepsilon$. Cela se traduit par

$$\big[|S_n| > \varepsilon\big] \subset \big[|S_n| \geqslant \varepsilon\big]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon).$$

À nouveau par comparaison, on en déduit que la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ est (absolument) convergente.

12. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on sait que S_m est une variable aléatoire discrète. Notons $(s_{m,i})_{i \in I_m}$, l'ensemble (fini ou dénombrable) des valeurs prises par S_m. Il est alors clair que

$$[|S_m| > \varepsilon] = \bigsqcup_{\substack{i \in I_m \\ |s_{m,i}| > \varepsilon}} \underbrace{[S_m = s_{m,i}]}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

en tant qu'union finie ou dénombrable d'événements.

En tant qu'union dénombrable d'événements, l'ensemble

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} [|S_m| > \varepsilon]$$

est donc un événement et, en tant qu'intersection dénombrable d'événements, l'ensemble

$$\bigcap_{n \geqslant 1} B_n$$

appartient lui aussi à la tribu $\mathcal{A}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$B_n = [|S_n| > \varepsilon] \cup \bigcup_{m \geqslant n+1} [|S_m| > \varepsilon] \supset B_{n+1}.$$

La famille $(B_n)_{n \geqslant 1}$ est donc une suite décroissante d'événements. Par continuité monotone de $\mathbf{P}$, on sait alors que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n \geqslant 1} B_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Et comme B_n est, par définition, une union dénombrable d'événements,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon).$$

Le majorant est le reste d'une série convergente (d'après la question précédente), donc il tend vers 0. Par encadrement, $\mathbf{P}(B_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et finalement l'événement $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est négligeable.

13. Par définition,

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant {}^1\!/_k].$$

Comme S_m est une variable aléatoire, alors $[|S_m| \leqslant {}^1\!/_k] \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable, donc $\Omega_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

❧ Par définition, la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant \varepsilon]$$

mais cette expression est inutile : l'intersection qui porte sur $\varepsilon > 0$ n'est pas une intersection dénombrable !

Il reste alors à remarquer que la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant {}^1\!/_k$$

(puisque la suite de terme général ${}^1\!/_k$ tend vers 0) et donc

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection *dénombrable*.

14. D'après la question précédente,

$$A^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k^c \quad \text{où} \quad \Omega_k^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geqslant n} [|S_m| > {}^1\!/_k].$$

D'après **12.** (avec $\varepsilon = {}^1\!/_k$), chaque événement Ω_k^c est négligeable. On sait qu'une union dénombrable d'événements négligeables est elle-même un événement négligeable, donc A^c est négligeable et par conséquent

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

❧ On vient ainsi démontrer un cas particulier de la **Loi forte des grands nombres** : presque sûrement, la suite de terme général $S_n(\omega)$ converge vers $0 = \mathbf{E}(X)$.

Solution II ❀ Polynômes de Hermite

Partie A. Préliminaires

1. a. Si P et Q n'étaient pas premiers entre eux, leur pgcd serait un polynôme D *non constant* de $\mathbb{C}[X]$ et, d'après le Théorème de D'Alembert–Gauss, il serait scindé. Toute racine du pgcd étant une racine commune à P et Q :

$$\begin{cases} (X-\alpha) \mid D \\ D \mid P \\ D \mid Q \end{cases} \implies \begin{cases} (X-\alpha) \mid P \\ (X-\alpha) \mid Q \end{cases},$$

il s'ensuivrait que P et Q auraient une racine commune.

Par contraposée, si P et Q n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$, alors ils sont premiers entre eux.

Remarque.— Le Théorème de D'Alembert–Gauss s'applique dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, les polynômes $P = (X^2+1)(X-1)$ et $Q = (X^2+1)(X+1)$ n'ont aucune racine *réelle* en commun et ne sont pas premiers entre eux : leur pgcd, égal à (X^2+1), n'a pas de racine *réelle*.

Une bonne rédaction doit faire comprendre qu'on est bien conscient de cette petite subtilité (même sans entrer dans les détails) : il faut souligner les arguments essentiels.

1. b. Comme P et Q divisent R, il existe deux polynômes P_0 et Q_0 (à coefficients complexes) tels que

$$R = PP_0 = QQ_0.$$

On voit alors que P divise le produit QQ_0 et comme P et Q sont premiers entre eux, alors P divise Q_0 (Théorème de Gauss). Il existe donc un polynôme $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q_0 = PQ_1$ et donc tel que

$$R = Q(PQ_1) = (PQ)Q_1,$$

ce qui prouve que PQ divise R.

Remarque.— Cette question de cours est une arnaque pure et simple : on invoque le théorème de Gauss (c'est l'énoncé qui le veut...) pour démontrer le théorème de Gauss ! En effet, le théorème de Gauss commence par : *Si* P *divise* QQ_0 *et si* P *et* Q *sont premiers entre eux...* On traduit cette hypothèse par la relation $QQ_0 = PP_0$, on écrit la relation de Bézout entre P et Q et on en déduit que P divise Q_0, c'est-à-dire que PQ divise QQ_0 !

2. Pour $n = 1$, le résultat est évident.

Supposons le résultat établi pour un entier $n \geqslant 1$: quels que soient les polynômes $P_1, \dots, P_n$ non nuls,

$$\frac{(P_1\cdots P_n)'}{P_1\cdots P_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k'}{P_k}.$$

On considère alors

$$P = (P_1\cdots P_n)P_{n+1}.$$

La règle de dérivation d'un produit nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \frac{(P_1\cdots P_n)'P_{n+1}}{(P_1\cdots P_n)P_{n+1}} + \frac{(P_1\cdots P_n)P_{n+1}'}{(P_1\cdots P_n)P_{n+1}} \\ &= \frac{(P_1\cdots P_n)'}{(P_1\cdots P_n)} + \frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P_k'}{P_k}. \qquad \text{(par HR)} \end{aligned}$$

La relation est ainsi établie par récurrence.

Partie B. Interpolation de Hermite

3. a. Si P est un polynôme de degré d, la formule de Taylor (spécifique aux polynômes) au point a donne

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Si $P(a) = P'(a) = 0$, il reste alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=2}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\ &= (X-a)^2 \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{d-2} \frac{P^{(k+2)}(a)}{(k+2)!} (X-a)^k \right)}_{\in \mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que P est divisible par $(X-a)^2$.

3. b. Il est clair que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2p}$. Comme l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont tous les deux de dimension 2p, il suffit de vérifier que φ est injective pour en déduire qu'elle est bijective.

Considérons donc $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ dans le noyau de φ. Par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad P(x_k) = P'(x_k) = 0$$

et, d'après **3.a.**, $(X - x_k)^2$ divise P.

Comme les x_k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - x_k)^2$ sont scindés et sans racine commune, donc deux à deux premiers entre eux par **1.a.** Par **1.b.**, le polynôme P est divisible par le produit des $(X - x_k)^2$. Or $\deg P < 2p$ tandis que

$$\deg \prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^2 = 2p.$$

Par conséquent, le polynôme P est nul, ce qui achève la preuve : l'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

3. c. Comme φ est bijective, quel que soit

$$A = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{2p},$$

il existe un, et un seul, polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\varphi(P_H) = A$.

4. On cherche le polynôme interpolateur sous la forme

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

Le problème posé se traduit par un système de quatre équations.

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 2 \\ 3a - 2b + c = -1 \end{cases}$$

Par **3.c.**, on sait qu'il s'agit d'un système de Cramer et comme il n'a qu'une seule solution, tous les coups sont permis pour trouver cette solution (même de ne pas appliquer l'algorithme du pivot).

On en déduit que $4b = 3$ (avec $L_3 - L_4$) et $b + d = 1/2$ (avec $L_1 + L_2$), donc $d = -1/4$. D'autre part, $a + c = -1/2$ (avec $L_1 - L_2$) et $3a + c = 1/2$ (avec $L_3 + L_4$), donc $a = 1/2$ et $c = -1$.

Le polynôme interpolateur de Hermite pour le problème posé est donc

$$P_H = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{4}X^2 - X - \frac{1}{4}.$$

REMARQUE.— Il convient de vérifier que le polynôme trouvé vérifie bien les quatre conditions imposées avant d'encadrer le résultat...

5. a. Pour tout $k \neq i$, le polynôme $(X - x_k)^2$ divise Q_i, donc x_k est une racine (au moins) double de Q_i et donc

$$\forall\, k \neq i, \quad Q_i(x_k) = Q_i'(x_k) = 0.$$

Il est clair que $Q_i(x_i) = 1$ (tous les facteurs sont égaux à 1).

On a établi au **2.** l'expression de la dérivée logarithmique d'un produit :

$$Q_i' = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} \frac{2(X - x_j)}{(X - x_j)^2} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} \frac{2}{(X - x_j)}.$$

En particulier,

$$Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} \frac{2}{x_i - x_j}.$$

5. b. Tout d'abord, $\deg Q_i = 2(p-1) = 2p-2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$.

Chaque crochet est une expression affine de X, donc P est la somme de p polynômes dont le degré est inférieur ou égal à $(2p-2)+1 = (2p-1)$, donc $\deg P \leqslant 2p-1$.

❧ Pour $i \neq k$, le facteur $Q_i(x_k)$ est nul. Dans l'expression de $P(x_k)$, il ne reste donc que le terme correspondant à $i = k$, soit :

$$\begin{aligned} P(x_k) &= \Big[\Big(1 - Q_k'(x_k)(x_k - x_k)\Big)\, a_k + (x_k - x_k)\, b_k \Big] \times 1 \\ &= a_k. \end{aligned}$$

❧ Calculons ensuite le polynôme dérivé.

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{i=1}^{p} \big[-Q_i'(x_i)\, a_i + b_i \big]\, Q_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \Big[\Big(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)\Big)\, a_i + (X - x_i)\, b_i \Big]\, Q_i' \end{aligned}$$

On utilise à nouveau les relations du **5.a.**

$$\begin{aligned} P'(x_k) &= \big[-Q_k'(x_k)\, a_k + b_k \big] \times 1 + a_k\, Q_k'(x_k) \\ &= b_k \end{aligned}$$

On constate ainsi que P est bien le polynôme interpolateur de Hermite.

5. c. Avec les données du **4.**, nous avons

$$Q_1 = \frac{(X-1)^2}{(-1-1)^2} = \frac{(X-1)^2}{4} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{(X+1)^2}{4}.$$

D'après **5.a.**,

$$Q_1'(-1) = \frac{2}{(-1-1)} = -1 \quad \text{et} \quad Q_2'(1) = \frac{2}{(1+1)} = 1.$$

La formule du **5.b.** nous donne alors :

$$\begin{aligned} P &= \big[\big(1-(-1)(X+1)\big)\times 1 + (X+1)\times(-1)\big]Q_1 \\ &\quad + \big[(\ldots)\times 0 + (X-1)\times 2\big]Q_2 \\ &= Q_1 + 2(X-1)Q_2 \\ &= \frac{-1}{4} - X + \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3 \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat trouvé au **4.**

Partie C. Polynômes orthogonaux de Hermite

6. Il est clair que $H_0 = 1$ est un polynôme unitaire de degré 0.

HR : Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné, H_n soit un polynôme unitaire de degré n.

D'après (HR), $\deg H_n' < \deg H_n = n$ et $\deg(XH_n) = n+1$, donc

$$\deg H_{n+1} = \deg(XH_n - H_n) = n+1$$

et le coefficient dominant de H_{n+1} est celui de XH_n, donc (HR) H_{n+1} est unitaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme H_n est unitaire et son degré est égal à n.

7. D'après la relation de récurrence,

$$H_1 = X$$

et il est clair que $H_1' = 1 = 1 \times H_0$.

HR : Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Par définition et (HR),

$$H_{n+2} = XH_{n+1} - H_{n+1}' = XH_{n+1} - (n+1)H_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} H_{n+2}' &= H_{n+1} + XH_{n+1}' - (n+1)H_n' \\ &= H_{n+1} + (n+1)[XH_n - H_n'] && \text{(HR)} \\ &= (n+2)H_{n+1} && (\text{déf. de } H_{n+1}) \end{aligned}$$

et le résultat est établi par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. a. Il est clair que le produit $[x \mapsto P(x)Q(x)f(x)]$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, en notant p et q, les degrés respectifs de P et Q,

$$\begin{aligned} e^{|x|}P(x)Q(x)f(x) &\underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^{p+q}e^{|x|-x^2/2}) \\ &\underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-x^2/2+|x|+(p+q)\,\ell n\, x}). \end{aligned}$$

Par croissances comparées, l'argument de la fonction exp tend vers $-\infty$. On sait que exp tend vers 0 au voisinage de $-\infty$. Donc, par composition de limites,

$$P(x)Q(x)f(x) = o(e^{-|x|})$$

lorsque x tend vers $\pm\infty$.

On sait que $\big[x \mapsto e^{-|x|}\big]$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ et on en déduit (Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables) que

$$[x \mapsto P(x)Q(x)f(x)]$$

est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, quels que soient les polynômes P et Q.

8. b. D'après la question précédente, la fonction

$$[(P,Q) \mapsto \langle P \,|\, Q \rangle]$$

est bien une application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

L'existence des intégrales étant assurée, il est clair que cette application est bilinéaire et symétrique.

Pour $P = Q$, l'intégrande $\big[x \mapsto P(x)^2 f(x)\big]$ est une fonction continue et positive. Par positivité de l'intégrale, $\langle P \,|\, P \rangle$ est donc positif et si $\langle P \,|\, P \rangle = 0$, alors $P(x)^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f ne s'annule jamais, on en déduit que la fonction polynomiale $[x \mapsto P(x)]$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et donc que le polynôme P est le polynôme nul.

Ainsi, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

REMARQUE.— Pour vérifier que la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive, il ne suffit pas de vérifier que l'*application polynomiale* est nulle, il faut prendre soin d'en déduire que le *polynôme* est nul (puisqu'il possède une infinité de racines).

9. a. Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -xf(x), \\ \frac{d}{dx}\big[H_n(x)f(x)\big] &= H_n'(x)f(x) - xH_n(x)f(x) \\ &= -H_{n+1}(x)f(x). \end{aligned}$$

❧ Les fonctions P et $-(H_{n+1}f) = (H_n f)'$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, le produit $P \times H_{n+1}f$ tend vers 0 au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ (détails donnés au **8.b.**).

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \langle P \,|\, H_{n+1} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_{n+1}(x)f(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\frac{d}{dx}[H_n(x)f(x)]\,dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_n(x)f(x)\,dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle P \,|\, H_{n+1} \rangle = \langle P' \,|\, H_n \rangle. \tag{$\star$}$$

❧ On en déduit (par récurrence immédiate) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle P \,|\, H_n \rangle = \langle P^{(n)} \,|\, H_0 \rangle.$$

REMARQUE.— Au début de la partie C, les H_n ont été définis au moyen d'une relation de récurrence tombée du ciel. Le calcul qui vient d'être fait éclaire l'origine de cette relation de récurrence : on a fait précisément ce qu'il fallait pour obtenir la relation $(\star)$.

9. b. D'après **6.**, la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est échelonnée en degré :
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \deg H_k = k$$
donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$, on déduit de la question précédente que
$$\langle\, H_i \,|\, H_j \,\rangle \;=\; \langle\, H_i^{(j)} \,|\, H_0 \,\rangle \;= 0$$
puisque $H_i^{(j)} = 0$ (on dérive j fois un polynôme de degré $i < j$).

Ainsi, $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$.

Remarque.— Du fait que $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit à la fois une base orthogonale et une famille échelonnée en degré, on déduit qu'on aurait aussi pu obtenir ces polynômes en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Comme on le constate, il est infiniment plus simple de les définir au moyen d'une relation de récurrence basée sur la formule d'intégration par parties...

9. c. En appliquant à nouveau la relation établie au **9.a.**,
$$\|H_n\|^2 \;=\; \langle\, H_n \,|\, H_n \,\rangle \;=\; \langle\, H_n^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle\,.$$
Or, d'après **6.**,
$$H_n = X^n + \cdots \quad \text{et donc} \quad H_n^{(n)} = n!.$$
On en déduit que
$$\|H_n\|^2 = n! \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = n!$$
(d'après le rappel de l'énoncé). Finalement :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|H_n\| = \sqrt{n!}.$$

9. d. D'après l'énoncé, $H_0 = 1$. On a vu au **7.** que $H_1 = X$. On déduit encore de la relation de récurrence que
$$H_2 = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad H_3 = X^3 - 3X.$$
✎ Comme la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant 3}$ est échelonnée en degré, on peut décomposer P dans cette base de $\mathbb{R}_3[X]$ de proche en proche, en commençant par le terme de plus haut degré.
$$\begin{aligned} X^3 + X^2 + X + 1 &= (X^3 - 3X) + (X^2 + 4X + 1) \\ &= H_3 + (X^2 - 1) + (4X + 2) \\ &= H_3 + H_2 + 4H_1 + 2H_0. \end{aligned}$$

9. e. Bien entendu, la droite sur laquelle on projette est connue :
$$D = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R} \cdot H_0.$$
Comme $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace de dimension finie, on sait que
$$\mathbb{R}_3[X] = D \overset{\perp}{\oplus} D^\perp$$
et la décomposition précédente exprime le polynôme P dans cette décomposition :
$$P = \underbrace{2H_0}_{\in D} + \underbrace{(4H_1 + H_2 + H_3)}_{\in D^\perp}.$$
D'après le cours,
$$d(P, \mathbb{R}_0[X]) = \|P - 2H_0\| = \|4H_1 + H_2 + H_3\|.$$
Comme H_1, H_2 et H_3 sont deux à deux orthongonaux, on peut calculer cette norme à l'aide du Théorème de Pythagore :
$$\|4H_1 + H_2 + H_3\|^2 = 16\|H_1\|^2 + \|H_2\|^2 + \|H_3\|^2$$
et, d'après **9.c.**,
$$d(P, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{16 \times 1 + 2 + 6} = 2\sqrt{6}.$$

10. a. On applique à nouveau la formule du **9.a.** :
$$\langle\, S \,|\, H_n \,\rangle \;=\; \langle\, S^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle \;= 0$$
car $S^{(n)} = 0$ (puisque $\deg S = p < n$).

10. b. Les fonctions S et H_n changent de signe en même temps (par construction de S). De plus, les polynômes S et H_n sont unitaires, donc les fonctions S et H_n sont de même signe (positives !) au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, les fonctions S et H_n sont positives et
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x)H_n(x) \geqslant 0.$$

10. c. D'après les deux questions précédentes et du fait que f est positive sur $\mathbb{R}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{S(x)H_n(x)f(x)}_{\geqslant 0}\,dx = 0.$$
Or le produit $S \cdot H_n \cdot f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (les trois facteurs sont continus), donc
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x)H_n(x)\underbrace{f(x)}_{>0} = 0.$$
Comme S et H_n sont deux fonctions polynomiales non nulles (les deux polynômes sont unitaires), le produit SH_n n'admet qu'un nombre fini de racines réelles. C'est absurde !

On en déduit que $p \geqslant n$. Or, d'après **6.**, on a aussi $p \leqslant n$ (un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes), donc $p = n$.

Autrement dit, le polynôme H_n admet n racines réelles de multiplicité impaire et comme $\deg H_n = n$, on en déduit que H_n admet n racines réelles simples (et qu'il est donc scindé sur $\mathbb{R}[X]$).