Composition de Mathématiques

Le 20 mars 2019 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

❖ I – Problème ❖

Partie A. Endomorphismes

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b, des constantes réelles.

1. On note Δ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \qquad \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. Démontrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad X^2P'' = [\Delta \circ (\Delta - I)](P).$$

3. Démontrer que : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On note Δ_n, l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Calculer la matrice de Δ_n relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On définit l'application Φ en posant :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Vérifier que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6. Vérifier que Φ induit un endomorphisme, qu'on notera Φ_n, de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Démontrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

8. Démontrer que φ induit un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$. Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

9. Calculer la matrice de φ_n relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'équation

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

10. Caractériser le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières $0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n$.

11. Caractériser le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une seule racine entière $0 \leqslant m \leqslant n$.

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie B. Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0 \tag{2}$$

où a et b sont deux constantes réelles.

13. Que déduit-on du théorème de Cauchy sur la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

14. On suppose que y est une solution de (2) sur I. Démontrer que la fonction $g = [t \mapsto y(e^t)]$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante.

$$u''(t) + (a-1)u'(t) + bu(t) = 0 \tag{3}$$

15. Réciproquement, on suppose que g est une solution de (3) sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $y = [x \mapsto g(\ln x)]$ est une solution de (2) sur I.

16. En déduire les solutions (à valeurs réelles) de l'équation (2) sur l'intervalle I pour $(a, b) = (3, 1)$, puis pour $(a, b) = (1, 4)$.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $(a, b) = (1, -4)$.

17. On suppose que y est solution de (2) sur J. Démontrer que $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Partie C. Une équation de Bessel

Dans cette dernière partie, on étudie l'équation différentielle suivante.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0 \tag{4}$$

19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

On suppose qu'il existe une série entière $\sum c_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ avec $c_0 = 1$, telle que la somme

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

soit solution de (4) sur $]-R, R[$.

20. Démontrer que

$$c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

21. Calculer le rayon de convergence R de la série entière ainsi obtenue.

22. Soit $r > 0$. On considère une solution f de (4) sur $]0, r[$ telle que le couple (J_0, f) soit une famille liée dans l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$. Démontrer que f est bornée au voisinage de 0.

Soit $\sum \alpha_k x^k$, un série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$, avec $\alpha_0 = 1$. Nous allons démontrer (par analyse et synthèse) qu'il existe une, et une seule, série entière $\sum \beta_n x^n$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

pour tout réel x appartenant aux domaines de convergences des deux séries.

23. On suppose que $\sum \beta_k x^k$ est une solution du problème posé. Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\beta_0 = 1$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0. \tag{5}$$

Soit r, un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

24. Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

25. Démontrer qu'il existe une, et une seule, suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (5) et la condition $\beta_0 = 1$. Vérifier que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

☞ *On pourra raisonner par récurrence.*

26. Que dire du rayon de convergence de $\sum \beta_n x^n$?

27. Soient $r > 0$ et λ, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$. Démontrer que la fonction

$$y = [x \mapsto \lambda(x) J_0(x)]$$

est solution de (4) sur $]0, r[$ si, et seulement si, la dérivée de la fonction

$$\left[x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)\right]$$

est nulle sur $]0, r[$.

28. Démontrer que J_0^2 est la somme d'une série entière. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Que vaut $J_0^2(0)$?

29. En déduire qu'il existe une fonction η, somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$, telle que la fonction

$$[x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln x]$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

❖ II – Problème ❖

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $[-1, 1]$ et une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi que X.

On note :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Démontrer que X est une variable aléatoire d'espérance finie.

On suppose désormais que X est une variable aléatoire *centrée* (quitte à remplacer X par $X - \mathbf{E}(X)$).

2. Énoncer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Démontrer cette inégalité dans le cas où Y ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

3. Démontrer que

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

4. Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{[\mathbf{E}(e^{tX})]^n}{e^{nt\varepsilon}}.$$

5. Soit $a > 1$. Démontrer que la fonction

$$g_a = \left[x \mapsto \frac{1-x}{2} a^{-1} + \frac{1+x}{2} a - a^x\right]$$

est positive sur $[-1, 1]$.

☞ *On pourra invoquer un argument de convexité.*

6. En déduire que

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t.$$

7. En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t$ pour tout $t > 0$.

8. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp(t^2/2)$ pour tout $t > 0$.

9. Soit $n \geqslant 1$. Démontrer que la fonction

$$\left[t \mapsto \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2)\right]$$

atteint un minimum (en un point qu'on précisera).

10. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.

12. Soient $\varepsilon > 0$ fixé et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} [|S_m| > \varepsilon].$$

Démontrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est un événement négligeable.

13. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on définit $\Omega_k \subset \Omega$ par

$$\omega \in \Omega_k \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Démontrer que chaque Ω_k est un événement. Exprimer l'ensemble A défini par

$$\omega \in A \iff \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$$

au moyen des événements Ω_k. En déduire que A est un événement.

14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.

Solution I ❀ Équation de Bessel

Partie A. Endomorphismes

Partie B. Une équation différentielle

Partie C. Une équation de Bessel

Solution II ❀ Loi des grands nombres

1. Soit $(x_i)_{i\in I}$, la famille, finie ou dénombrable, des valeurs prises par la variable aléatoire discrète X.
Par *définition*, X est une variable aléatoire d'espérance finie si, et seulement si, la famille

$$\big(x_i\,\mathbf{P}(X=x_i)\big)_{i\in I}$$

est sommable. Or $x_i\in[-1,1]$ pour tout $i\in I$ par hypothèse, donc

$$\forall\, i\in I,\quad |x_i|\,\mathbf{P}(X=x_i)\leqslant \mathbf{P}(X=x_i).$$

Mais X est une variable aléatoire discrète, donc la famille $([X=x_i])_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints. Comme $\mathbf{P}$ est σ-additive, on en déduit que la famille $(\mathbf{P}(X=x_i))_{i\in I}$ est sommable et, d'après le Théorème de comparaison, la famille $(x_i\,\mathbf{P}(X=x_i))_{i\in I}$ est sommable elle aussi.
Donc X est bien une variable aléatoire d'espérance finie.

REMARQUE.— La même démonstration établit que *toute variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie.*

2. Inégalité de Markov :
Soit Y*, une variable aléatoire positive d'espérance finie. Pour tout* $\alpha>0$*,*

$$\mathbf{P}(Y\geqslant\alpha)\leqslant\frac{\mathbf{E}(Y)}{\alpha}.$$

❧ Démonstration dans le cas où Y prend un nombre fini de valeurs : on note $(y_i)_{0\leqslant i<n}$, la famille des valeurs (positives) prises par Y et on fixe $\alpha>0$.
Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y)&=\sum_{0\leqslant i<n} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)\\&=\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i<\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)+\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}} y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i).\end{aligned}$$

Si $y_i<\alpha$, alors $y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)\geqslant 0$ car Y est à valeurs positives ; si, au contraire, $y_i\geqslant\alpha$, alors

$$y_i\,\mathbf{P}(Y=y_i)\geqslant\alpha\,\mathbf{P}(Y=y_i)$$

car $\mathbf{P}$ est à valeurs positives. Par conséquent,

$$\mathbf{E}(Y)\geqslant\alpha\sum_{\substack{0\leqslant i<n\\ y_i\geqslant\alpha}}\mathbf{P}(Y=y_i)=\alpha\,\mathbf{P}(Y\geqslant\alpha)$$

et l'inégalité de Markov en découle (puisque $\alpha>0$).

3. Comme X est une variable aléatoire d'espérance finie, alors $|X|$ est aussi une variable aléatoire d'espérance finie et comme $|X|$ est à valeurs positives, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov.

4. Comme $nt>0$ et que la fonction exp est strictement croissante, alors

$$\begin{aligned}\forall\,\omega\in\Omega,\quad S_n(\omega)\geqslant\varepsilon&\iff ntS_n(\omega)\geqslant nt\varepsilon\\&\iff \exp[ntS_n(\omega)]\leqslant\exp(nt\varepsilon).\end{aligned}$$

(NB : il faut insister sur le *strictement* pour justifier les équivalences !)
On en déduit que

$$[S_n\geqslant\varepsilon]=\big[e^{ntS_n}\geqslant e^{nt\varepsilon}\big]$$

et donc que (par croissance de $\mathbf{P}$)

$$\mathbf{P}(S_n\geqslant\varepsilon)=\mathbf{P}(e^{ntS_n}\geqslant e^{nt\varepsilon}).$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et bornées. D'après le Théorème des coalitions, les variables aléatoires $e^{tX_1}, e^{tX_2}, \ldots, e^{tX_n}$ sont elles aussi indépendantes et bornées. Or

$$e^{ntS_n} = e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n},$$

donc e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie et, par indépendance des facteurs,

$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(e^{tX_i}) = \big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n$$

puisque les variables X_i ont toutes même loi que X.

Comme e^{ntS_n} est une variable aléatoire positive d'espérance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Markov et en déduire que

$$\mathbf{P}(e^{ntS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}) \leqslant \frac{\big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

et donc enfin que

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\big[\mathbf{E}(e^{tX})\big]^n}{e^{nt\varepsilon}}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

5. Pour $a > 0$, on sait que $a^x = e^{x \ln a}$. Donc g_a est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier,

$$g_a''(x) = -a^x(\ln a)^2 < 0$$

donc la fonction g_a est concave sur $[-1, 1]$.

Or $g_a(1) = a - a = 0$ et $g_a(-1) = a^{-1} - a^{-1} = 0$, donc la corde qui joint les points d'abscisses ± 1 sur le graphe de g_a est un segment de l'axe des abscisses. Comme g_a est concave, son graphe est au-dessus de ses cordes, donc

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad g_a(x) \geqslant 0.$$

6. Pour $t > 0$, on pose $a = e^t > 1$ et

$$\forall\, x \in [-1, 1], \quad \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} - e^{tx} \geqslant 0$$

d'après la question précédente.

7. Par hypothèse, $x = X(\omega) \in [-1, 1]$ pour tout $\omega \in \Omega$ et d'après la question précédente,

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad e^{tX(\omega)} \leqslant \operatorname{ch} t + X(\omega) \operatorname{sh} t.$$

Les variables X et e^{tX} sont d'espérance finie (elles sont bornées toutes les deux par hypothèse) et l'espérance conserve les inégalités, donc

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch} t + \mathbf{E}(X)\ \operatorname{sh} t = \operatorname{ch} t$$

puisque X est centrée par hypothèse.

8. Il s'agit en fait de vérifier que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 2^k k! \leqslant (2k)!$$

c'est-à-dire

$$2^k \leqslant \prod_{i=k+1}^{2k} i = \prod_{i=1}^{k} (k+i).$$

Pour $k \geqslant 1$, on a de chaque côté un produit de k facteurs ; à gauche, tous les facteurs sont égaux à 2 ; à droite, les facteurs sont tous supérieurs à $(k+i) \geqslant (k+1) \geqslant 2$. Par conséquent, l'inégalité est démontrée pour $k \geqslant 1$.

Enfin, pour $k = 0$, l'inégalité est évidente : elle se réduit à $1 \leqslant 1$...

Donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^k.$$

❧ On en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \exp(t^2/2)$$

et donc, d'après la question précédente, que

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \exp(t^2/2).$$

9. Posons

$$\forall\, t > 0, \quad f_n(t) = \exp(-nt\varepsilon + nt^2/2).$$

Il est clair que f_n est strictement positive et dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$f_n'(t) = n(t-\varepsilon)f_n(t)$$

donc $f_n'(t)$ est du signe de $(t-\varepsilon)$.

La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $]0, \varepsilon]$ et strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. Cette fonction atteint donc un minimum en $t = \varepsilon$ et ce minimum est égal à

$$f_n(\varepsilon) = \exp(-n\varepsilon^2/2).$$

10. D'après **[4.]** et **[7.]**,

$$\forall\, t > 0, \quad \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant f_n(t).$$

Le minorant (à gauche) étant indépendant de t, on peut passer à la borne inférieure par rapport à $t > 0$ et obtenir :

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant f_n(\varepsilon) = \exp(-n\varepsilon^2/2).$$

❧ La propriété $|S_n(\omega)| \geqslant \varepsilon$ est vraie si $S_n(\omega) \geqslant \varepsilon$ ou si $S_n(\omega) \leqslant -\varepsilon$. Par conséquent,

$$[|S_n| \geqslant \varepsilon] = [S_n \geqslant \varepsilon] \sqcup [S_n \leqslant -\varepsilon] = [S_n \geqslant \varepsilon] \sqcup [-S_n \geqslant \varepsilon]$$

et donc, par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbf{P}(-S_n \geqslant \varepsilon).$$

Les variables aléatoires $-X_1, \dots, -X_n$ vérifient les mêmes hypothèses que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$: elles sont discrètes, à valeurs dans $[-1, 1]$, indépendantes (Théorème des coalitions) et toutes de même loi (celle de $-X$, qui est *a priori* différente de celle de X).

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}\big((-X_1) + \cdots + (-X_n) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$$

et finalement

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon^2/2).$$

11. La majoration précédente peut aussi s'écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2q^n$$

avec $0 < q = \exp(-\varepsilon^2/2) < 1$. Par comparaison avec une série géométrique, la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$ est donc (absolument) convergente.

❧ Il est par ailleurs clair que : si $|S_n(\omega)| > \varepsilon$, alors $|S_n(\omega)| \geqslant \varepsilon$. Cela se traduit par

$$\big[|S_n| > \varepsilon\big] \subset \big[|S_n| \geqslant \varepsilon\big]$$

et donc, par croissance de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon).$$

À nouveau par comparaison, on en déduit que la série $\sum \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ est (absolument) convergente.

12. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on sait que S_m est une variable aléatoire discrète. Notons $(s_{m,i})_{i \in I_m}$, l'ensemble (fini ou dénombrable) des valeurs prises par S_m. Il est alors clair que

$$[|S_m| > \varepsilon] = \bigsqcup_{\substack{i \in I_m \\ |s_{m,i}| > \varepsilon}} \underbrace{[S_m = s_{m,i}]}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

en tant qu'union finie ou dénombrable d'événements.

En tant qu'union dénombrable d'événements, l'ensemble

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant n} [|S_m| > \varepsilon]$$

est donc un événement et, en tant qu'intersection dénombrable d'événements, l'ensemble

$$\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$$

appartient lui aussi à la tribu $\mathcal{A}$.

❧ Pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$B_n = [|S_n| > \varepsilon] \cup \bigcup_{m\geqslant n+1} [|S_m| > \varepsilon] \supset B_{n+1}.$$

La famille $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite décroissante d'événements. Par continuité monotone de $\mathbf{P}$, on sait alors que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} B_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Et comme B_n est, par définition, une union dénombrable d'événements,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(B_n) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon).$$

Le majorant est le reste d'une série convergente (d'après la question précédente), donc il tend vers 0. Par encadrement, $\mathbf{P}(B_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et finalement l'événement $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ est négligeable.

13. Par définition,

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant 1/k].$$

Comme S_m est une variable aléatoire, alors $[|S_m| \leqslant 1/k] \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par intersection dénombrable et par union dénombrable, donc $\Omega_k \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

❧ Par définition, la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geqslant n} [|S_m| \leqslant \varepsilon]$$

mais cette expression est inutile : l'intersection qui porte sur $\varepsilon > 0$ n'est pas une intersection dénombrable !

Il reste alors à remarquer que la suite de terme général $S_n(\omega)$ tend vers 0 si, et seulement si,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, m \geqslant n, \quad |S_m(\omega)| \leqslant 1/k$$

(puisque la suite de terme général $1/k$ tend vers 0) et donc

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k \in \mathcal{A}$$

puisque $\mathcal{A}$ est stable par intersection *dénombrable*.

14. D'après la question précédente,

$$A^c = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k^c \quad \text{où} \quad \Omega_k^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geqslant n} [|S_m| > 1/k].$$

D'après **[12.]** (avec $\varepsilon = 1/k$), chaque événement Ω_k^c est négligeable. On sait qu'une union dénombrable d'événements négligeables est elle-même un événement négligeable, donc A^c est négligeable et par conséquent

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

❧ On vient ainsi démontrer un cas particulier de la **Loi forte des grands nombres** : presque sûrement, la suite de terme général $S_n(\omega)$ converge vers $0 = \mathbf{E}(X)$.