**Lycée Pierre CORNEILLE**
**ANNÉE SCOLAIRE 2018/2019** **MP**

# Composition de Mathématiques

Le 20 mars 2019 – De 13 heures à 16 heures

---

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.**

## ❖ Problème ❖

Soient $U$, un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Le **laplacien** de cette fonction est alors défini sur $U$ par

$$\forall\, m \in U, \quad \Delta f(m) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m).$$

La fonction $f$ est dite **harmonique** sur $U$ si, et seulement si, son laplacien est identiquement nul sur $U$.

### Partie A. Noyau de Dirichlet

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}.$$

**1.** Vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\pi.$$

**2.** On suppose que $t$ n'est pas un multiple entier de $2\pi$. Vérifier que

$$D_n(t) = \frac{\sin[(n + 1/2)t]}{\sin(t/2)}.$$

**3.** Soit $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Démontrer que l'intégrale

$$I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\sin(\alpha u)\,du$$

tend vers $0$ lorsque le réel $\alpha$ tend vers $+\infty$.

On considère maintenant une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $2\pi$-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx.$$

**4.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, démontrer que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)\,du.$$

**5.** En déduire que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin[(n+1/2)u]\,du$$

où $h_t$ est une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ qu'on explicitera.

On *admettra* que la fonction $h_t$ est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[-\pi, \pi]$.

**6.** Au moyen d'une double intégration par parties, démontrer que

$$c_n(g) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \quad \text{et} \quad c_{-n}(g) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**7.** Établir que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-int}.$$

### Partie B. Coordonnées polaires

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne canonique. On suppose ici que $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}$.

Soient $m_0 = (x_0, y_0) \in U$ et $\delta > 0$, un réel tel que la boule fermée $B(m_0, \delta)$ soit incluse dans $U$. Pour $(r, t) \in ]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}$, on pose

$$g(r, t) = f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t).$$

**8.** Démontrer que la fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}$ et que, sur cet ouvert, elle vérifie la relation suivante.

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

Pour $0 \leqslant r < \delta$, on pose

$$J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\,dt.$$

**9.** Démontrer que l'application $J$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[0, \delta[$. Prouver la relation

$$\forall\, 0 \leqslant r < \delta, \quad rJ''(r) + J'(r) = 0.$$

☞ *On évitera de passer trop de temps sur cette question !*

**10.** En déduire que l'application $J$ est constante sur $[0, \delta[$.

## Partie C. Problème de Dirichlet

On suppose ici que $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique sur $U$ qui atteint un extremum en un point $m_0$ de $U$.

**11.** En utilisant les résultats établis dans la partie précédente, démontrer que $f$ est constante sur toute boule ouverte centrée en $m_0$ et contenue dans l'ouvert $U$.

Pour la suite de cette partie, on considère le carré fermé
$$K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$
et le carré ouvert
$$U = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[\,.$$

**12.** On considère une fonction continue
$$f : K \to \mathbb{R}$$
harmonique sur l'ouvert $U$ et identiquement nulle sur le bord
$$\partial K = K \cap U^c$$
du carré. Démontrer que $f$ est identiquement nulle sur $K$.

**13.** On cherche ici à construire une fonction $f : K \to \mathbb{R}$, qui vérifie les conditions aux limites suivantes.

**C1 -** La fonction $f$ est continue sur $K$.

**C2 -** La fonction $f$ est harmonique sur $U$.

**C3 -** $f(x, 0) = \sin x$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

**C4 -** $f(x, 2\pi) = 0$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

**C5 -** $f(0, y) = f(2\pi, y) = 0$ pour $y \in [0, 2\pi]$.

Construire une fonction $f_0$ de la forme
$$f_0(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$
et qui vérifie ces cinq conditions. Démontrer ensuite que cette fonction $f_0$ est l'unique solution du problème posé.

## Partie D. Développement en série

On note $D(R)$, le disque ouvert de centre $O = (0, 0)$ et de rayon $R > 0$. Par convention, si $R = +\infty$, ce disque ouvert est égal à $\mathbb{R}^2$.

On considère ici une fonction harmonique
$$f : D(R) \to \mathbb{C}$$
et, pour tout $0 \leqslant r < R$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose
$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos t, r\sin t)e^{-int}\,dt.$$

**14.** En utilisant les calculs du **8.**, démontrer que la fonction $v_n$ vérifie
$$\forall\, 0 \leqslant r < R, \quad r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0.$$

**15.** Résoudre l'équation différentielle du **14.** sur $[0, R[$ au moyen du changement de variable $r = e^s$.

**16.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'existence d'un coefficient complexe $a_n$ tel que
$$\forall\, 0 \leqslant r < R, \quad v_n(r) = a_n r^{|n|}.$$

**17.** Démontrer que, pour tout $0 \leqslant r < R$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f(r\cos t, r\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(re^{-it})^n.$$

**18.** On suppose que la fonction harmonique $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $f$ est constante.

## Partie E. Théorème de D'Alembert-Gauss

On considère ici un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, supposé non constant. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$f(x, y) = P(x + iy).$$

**19.** Exprimer les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
à l'aide des polynômes dérivés $P'$ et $P''$. En déduire que la fonction $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

**20.** Soit $U$, un ouvert du plan où la fonction $f$ ne s'annule pas. Démontrer que la fonction
$$g = \frac{1}{f}$$
est harmonique sur $U$.

**21.** Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $|P(z)| \geqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant A$.

**22.** En déduire une preuve du Théorème de D'Alembert-Gauss (dont on rappellera l'énoncé précis).

## Solution ❁ Fonctions harmoniques

### Partie A. Noyau de Dirichlet

**1.** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\big[t \mapsto e^{ikt}\big]$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ et

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$$

cependant que

$$\forall\, k \neq 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt\,dt = 0.$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = 2\pi.$$

**2.** Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ et $t/2 \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin(t/2) \neq 0$.

Comme $e^{it} \neq 1$, on déduit de la formule de la somme géométrique que

$$D_n(t) = e^{-int}\frac{(e^it)^{2n+1} - 1}{e^{it} - 1}$$

et en factorisant par l'angle moitié (au numérateur et au dénominateur) que

$$D_n(t) = \frac{2i\sin[(2n+1)t/2]}{2i\sin(t/2)} = \frac{\sin[(n+1/2)t]}{\sin(t/2)}.$$

**3.** Comme $\alpha$ tend vers $+\infty$, on suppose pour commencer que $\alpha > 0$.

On intègre par parties :

$$I_\alpha = \frac{[h(-\pi) - h(\pi)]\cos(\alpha\pi)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\cos(\alpha u)\,du.$$

Les fonctions $h$ et $h'$ sont continues sur le segment $[-\pi, \pi]$, donc elles sont bornées et

$$\forall\, u \in [-\pi, \pi], \quad |h(u)| \leqslant \|h\|_\infty \quad \text{et} \quad |h'(u)| \leqslant \|h'\|_\infty.$$

On déduit alors de l'inégalité triangulaire que

$$\left|\frac{[h(-\pi) - h(\pi)]\cos\alpha\pi}{\alpha}\right| \leqslant \frac{2\|h\|_\infty}{\alpha}$$

et comme

$$\forall\, u \in [-\pi, \pi], \quad \big|h'(u)\cos\alpha u\big| \leqslant \|h'\|_\infty$$

on déduit de l'inégalité de la moyenne que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\cos\alpha u\,du\right| \leqslant 2\pi\|h'\|_\infty.$$

L'inégalité triangulaire mène alors à

$$\forall\, \alpha > 0, \quad |I_\alpha| \leqslant \frac{2\|h\|_\infty + 2\pi\|h'\|_\infty}{\alpha}$$

ce qui se traduit par

$$I_\alpha = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)$$

et donne en particulier : $\lim_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = 0$.

**4.** On considère ici une somme qui ne compte qu'un nombre *fini* de termes et chaque terme est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : on peut donc invoquer la linéarité de l'intégrale.

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\,dx$$

On effectue alors le changement de variable affine $u = t - x$ (et donc $du = -\,dx$) en pensant à bien changer les bornes de l'intervalle d'intégration :

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi \iff t + \pi \geqslant u \geqslant t - \pi.$$

On en déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)D_n(t-x)\,dx = \int_{t-\pi}^{t+\pi} g(t-u)D_n(u)\,du.$$

Les fonctions $g$ et $D_n$ sont $2\pi$-périodiques, donc l'intégrande

$$[u \mapsto g(t-u)D_n(u)]$$

est $2\pi$-périodique. Par conséquent, l'intégrale sur une période ne dépend pas de la période choisie et on obtient finalement

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)\,du.$$

**5.** D'après **1.**,

$$g(t) = g(t) \times 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(u)\,du.$$

D'après **2.**, pour $u \in [-\pi, \pi]$ *non nul*,

$$g(t)D_n(u) = \frac{g(t)}{\sin(u/2)} \times \sin[(n+1/2)u].$$

La relation du **4.** et la linéarité de l'intégrale incitent alors à poser

$$\forall\, 0 < |u| \leqslant \pi, \quad h_t(u) = \frac{g(t-u) - g(u)}{\sin(u/2)}.$$

Comme $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$, il est clair que la fonction $h_t$ ainsi définie est continue sur

$$[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$$

mais on déduit aussi de la formule de Taylor-Young que

$$h_t(u) = \frac{-ug'(t) + o(u)}{u/2 + o(u)}$$

et donc que $h_t(u)$ tend vers $-2g'(t)$ lorsque $u$ tend vers $0$.

En posant

$$h_t(0) = -2g'(t),$$

on définit alors une fonction continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin[(n+1/2)u]\,du$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**6.** On se restreint au cas $n \neq 0$ (puisque, de toute façon, l'entier $n$ tend vers l'infini).

Comme la fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut intégrer deux fois par parties. De plus, elle est $2\pi$-périodique, donc $g'$ est aussi $2\pi$-périodique et

$$g(-\pi) = g(\pi) \quad \text{et} \quad g'(-\pi) = g'(\pi).$$

En outre, $e^{-in\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$, donc

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(g) &= \Big[\frac{-1}{in} g(x)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)e^{-inx}\,dx, \\
2in\pi c_n(g) &= \Big[\frac{-1}{in} g'(x)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}\,dx.
\end{aligned}$$

La fonction $g''$ étant continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, elle y est bornée et

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi], \quad \big|g''(x)e^{-inx}\big| \leqslant \|g''\|_\infty$$

d'où, pour tout $|n| \geqslant 1$,

$$|2n^2\pi c_n(g)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \|g''\|_\infty\,dx = 2\pi\|g''\|_\infty$$

et en particulier

$$c_n(g) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.

**7.** D'après la question précédente,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|c_n(g)e^{int}\big| \leqslant \frac{\|g''\|_\infty}{n^2}.$$

Le majorant est indépendant de $t$ et on reconnaît le terme général d'une série convergente. Par conséquent, les séries de fonctions $\sum c_n(g)e^{int}$ et $\sum c_{-n}(g)e^{-int}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve l'existence du second membre de la formule à établir.

❧ Comme la fonction $h_t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$ (admis par l'énoncé), on peut lui appliquer le résultat du **3.** avec $\alpha = (n + 1/2)$ :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin[(n+1/2)u]\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On peut alors déduire de **5.** que

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-int}.$$

## Partie B. Coordonnées polaires

**8.** Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}
\forall\, (r, t) \in ]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}, \quad (x, y) &= (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \\
&\in [\|(x, y) - m_0\| < \delta] \\
&\subset U.
\end{aligned}$$

En particulier,

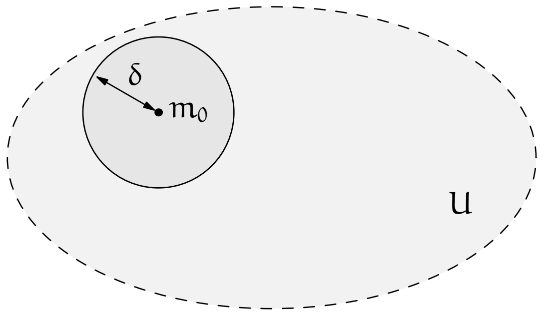
$$\forall\, (r, t) \in ]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}, \quad \Delta f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) = 0$$

puisque $f$ est supposée harmonique sur $U$.

❧ On *sait* que les applications coordonnées

$$[(r, t) \mapsto r] \quad \text{et} \quad [(r, t) \mapsto t]$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Par composition et produit, les fonctions $[(r, t) \mapsto r\sin t]$ et $[(r, t) \mapsto r\cos t]$ sont donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.




Par restriction, la fonction

$$[(r, t) \mapsto (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ de $]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}$ dans $B(m_0, \delta) \subset U$. Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $U$, on en déduit par composition que

$$g = [(t, r) \mapsto g(r, t) = f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ de $]-\delta, \delta[ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Pour établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $g$, nous allons appliquer la règle de la chaîne (et faire preuve de persévérance).

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \cos t \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

On recommence en dérivant cette combinaison linéaire et en appliquant le Théorème de Schwarz (puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos t\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) + \sin t\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \\
&= \cos^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin 2t\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'expression

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\frac{\partial g}{\partial r}$$

est égale à

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

(puisque $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$). On recommence, avec la variable t cette fois.

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = -r\sin t\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos t\frac{\partial f}{\partial y}$$

On continue, en remarquant qu'il s'agit cette fois de dériver deux produits (et on applique à nouveau le Théorème de Schwarz). On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

et on en déduit enfin que, pour tout $(r,t) \in ]-\delta,\delta[ \times \mathbb{R}$,

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = (x^2+y^2)\Delta f = 0$$

puisque f est harmonique sur l'ouvert U (cf. remarque préliminaire).

**9.** Il s'agit bien entendu d'appliquer le Théorème de dérivation sous $\int$.

❧ **Régularité.** Pour tout $t \in I = [-\pi,\pi]$, la fonction

$$[r \mapsto (r,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ (la première composante est linéaire, la seconde est constante) et donc, par restriction, de classe $\mathscr{C}^2$ de $\Omega = ]-\delta,\delta[$ dans

$$]-\delta,\delta[ \times \mathbb{R}.$$

D'après **8.**, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet ouvert, donc par composition, la fonction

$$[r \mapsto g(r,t)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega$.

❧ **Intégrabilité.** De même, pour tout $r \in \Omega$, la fonction

$$[t \mapsto (r,t)]$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et donc de I dans $\Omega \times I$ et comme g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, alors les fonctions

$$[t \mapsto g(r,t)],\quad \left[t \mapsto \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right] \quad\text{et}\quad \left[t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right]$$

sont continues sur le segment I et donc intégrables sur I.

❧ **Domination.** Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, les fonctions

$$f,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

sont continues sur U et en particulier sur le *compact* $B(m_0,\delta)$. Elles sont donc bornées sur ce compact. Or

$$(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t) \in B(m_0,\delta)$$

pour tout $r \in \Omega$ et tout $t \in I$, donc on peut déduire des expressions trouvées au **8.** que les trois fonctions

$$g,\quad \frac{\partial g}{\partial r},\quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

sont bornées sur $\Omega \times I$.

Comme l'intervalle d'intégration I est un segment, toute fonction constante est intégrable sur I, ce qui prouve la domination : on a bien trouvé, pour chacune de ces trois fonctions, un majorant indépendant de $r \in \Omega$ et intégrable sur I.

D'après le Théorème de dérivation sous $\int$, la fonction J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = ]-\delta,\delta[$ et

$$\forall\, r \in ]-\delta,\delta[,\quad J'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,dt$$
$$J''(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,dt.$$

REMARQUE.— Il est facile de vérifier que J est une fonction paire : on n'apporte rien au sujet en travaillant sur $]-\delta,\delta[$ plutôt que sur $[0,\delta[$.

❧ Grâce à la relation établie au **8.**, pour tout $0 \leqslant r < \delta$,

$$r^2J''(r) + rJ'(r) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,dt$$
$$= -\left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\partial g}{\partial t}(r,-\pi) - \frac{\partial g}{\partial t}(r,\pi).$$

Or (on a fait ces calculs au **8.**)

$$\frac{\partial g}{\partial t}(r,\pm\pi) = -r\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - r, y)$$

donc

$$\forall\, 0 \leqslant r < \delta,\quad r^2J''(r) + rJ'(r) = 0.$$

En simplifiant par r, on en déduit que

$$\forall\, 0 < r < \delta,\quad rJ''(r) + J'(r) = 0.$$

(Noter l'apparition d'une inégalité stricte pour ne pas diviser par zéro...) Comme les deux membres de l'identité sont des fonctions continues sur $]-\delta,\delta[$ (puisque J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle), on peut prolonger cette identité par continuité :

$$\forall\, 0 \leqslant r < \delta,\quad rJ''(r) + J'(r) = 0.$$

(Noter cette fois la réapparition, justifiée, de l'inégalité large !)

**10.** En résolvant l'équation différentielle sur $]0,\delta[$, on trouve qu'il existe une constante K telle que

$$\forall\, 0 < r < \delta,\quad J'(r) = \frac{K}{r}.$$

Or J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\delta,\delta[$, donc J doit rester bornée au voisinage de $r = 0$, donc la constante K doit être nulle. Par conséquent,

$$\forall\, 0 < r < \delta,\quad J'(r) = 0$$

et, par continuité de $J'$ en $r = 0$, on a $J'(r) = 0$ pour tout $0 \leqslant r < \delta$.

Comme la dérivée $J'$ est nulle sur l'*intervalle* $[0,\delta[$, la fonction J est constante sur $[0,\delta[$.

**Partie C. Problème de Dirichlet**

**11.** Considérons pour commencer une boule *fermée* $B(m_0, \delta)$ contenue dans l'ouvert U. D'après **10.**, la fonction J est constante sur $[0, \delta[$, donc

$$\forall\, 0 \leqslant r < \delta, \quad J(r) = J(0) = 2\pi f(m_0).$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} 0 &= J(0) - J(r) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(m_0) - f(x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin t)\, dt. \end{aligned}$$

La fonction

$$[t \mapsto f(m_0) - f(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)]$$

est continue (par continuité de f) sur le segment $[-\pi, \pi]$, de signe constant (positive si f atteint un maximum en $m_0$ ou négative si f atteint un minimum en $m_0$) alors que son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. Par conséquent, cette fonction est identiquement nulle, ce qui prouve que

$$\begin{aligned} &\forall\, t \in [-\pi, \pi], \forall\, 0 \leqslant r < \delta, \\ &f(x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin r) = f(m_0) \end{aligned}$$

ou, autrement dit, la fonction f est constante, égale à $f(m_0)$ sur la boule ouverte $[\|m - m_0\| < \delta]$.

❧ Considérons maintenant la boule ouverte

$$[\|m - m_0\| < r] \subset U.$$

Pour tout point m dans cette boule, il existe un réel $\delta$ tel que

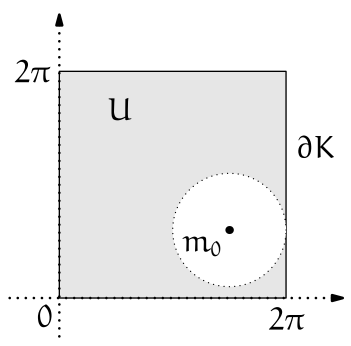
$$\|m - m_0\| < \delta < r.$$

La discussion précédente, sur la boule fermée $B(m_0, \delta)$, montre que $f(m) = f(m_0)$ et donc que f est constante sur la boule ouverte de centre $m_0$ et de rayon r.

**12.** L'ensemble K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, donc compact. Comme f est continue sur le compact K, elle atteint un minimum et un maximum sur K. Nous allons discuter sur l'endroit où f atteint son minimum.

❧ Si le minimum est atteint en un point $m_0$ du bord $\partial K$, alors ce minimum est nul et la fonction f est positive sur K.

❧ Si au contraire le minimum est atteint en un point $m_0$ de U, la fonction f est constante sur le disque ouvert de centre $m_0$ et qui est tangent au bord $\partial K$.




Par continuité de f sur K, la valeur (constante) de f sur ce disque ouvert est égale à la valeur de f au point de tangence avec $\partial K$, c'est-à-dire nulle. Le minimum de f sur K étant nul, on en déduit que f est positive sur K.

❧ Ainsi, quel que soit l'endroit où le minimum est atteint, la fonction f est positive sur K. Si elle n'est pas identiquement nulle, alors son maximum est strictement positif et par conséquent, il est atteint en un point $m_1 \in U$ (puisqu'il ne peut pas être atteint sur le bord $\partial K$).

Le même raisonnement que pour $m_0$ nous conduit à la conclusion suivante : $f(m_1) = 0$. Comme le minimum et le maximum de f sont nuls, on en déduit que f est identiquement nulle sur K.

**13.** On va construire une solution $f_0$ par analyse et synthèse.

❧ Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$, alors $f_0$ est continue sur le compact K (contrainte **C1**) en tant que produit de la fonction continue

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

par la fonction continue

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \psi(y) \end{array}$$

et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U (contrainte **C2**) en tant que produit de la fonction $\mathscr{C}^2$

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & ]0, 2\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

par la fonction $\mathscr{C}^2$

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & ]0, 2\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \psi(y) \end{array}$$

(on ne sait pas vraiment ce qu'est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un compact...).

D'après la condition **C3**,

$$\varphi(\pi/2)\psi(0) = \sin \pi/2 = 1$$

donc $\psi(0) \neq 0$. Comme $f_0$ est un produit et qu'on ne fait aucune hypothèse sur les facteurs isolés, on peut supposer sans restriction pour la suite que $\psi(0) = 1$ et donc (toujours **C3**) que

$$\forall\, x \in [0, 2\pi], \quad \varphi(x) = \sin x$$

ce qui est cohérent avec **C5**.

On vérifie facilement que

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad \Delta f_0(x, y) = \varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y)$$

et la contrainte **C2** nous conduit alors à

$$\forall\, y \in ]0, 2\pi[\,, \quad \psi''(y) - \psi(y) = 0$$

(en choisissant $x = \pi/2$). On en déduit qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, y \in ]0, 2\pi[\,, \quad \psi(y) = A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y.$$

Comme $\psi$ est, par hypothèse, continue sur $[0, 2\pi]$, de même que le second membre de cette identité, on en déduit qu'en fait

$$\forall\, y \in [0, 2\pi], \quad \psi(y) = A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y.$$

Or $\psi(0) = 1$ (choisi plus haut) et $\psi(2\pi) = 0$ (d'après la contrainte **C4** avec $x = \pi/2$), donc

$$\forall\, y \in [0, 2\pi], \quad \psi(y) = \operatorname{ch} y - \frac{\operatorname{ch} 2\pi}{\operatorname{sh} 2\pi} \cdot \operatorname{sh} y.$$

❧ Réciproquement, on vérifie sans peine que la fonction

$$f_0 = \left[(x, y) \mapsto \frac{\sin x \operatorname{sh}(2\pi - y)}{\operatorname{sh} 2\pi}\right]$$

est continue sur K, de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur U et vérifie aussi les contraintes **C3**, **C4** et **C5**.

❧ Si on a deux solutions $f_0$ et $f_1$ au problème posé, alors la différence $f_1 - f_0$ est continue sur le compact K, de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur l'ouvert U (par linéarité du laplacien) et nulle sur le bord $\partial K$ ! D'après **12.**, la fonction $f_1 - f_0$ est identiquement nulle sur K, ce qui prouve que la solution $f_0$ qu'on vient de construire est la seule solution possible.

## Partie D. Développement en série

**14.** On procède comme au **9.** en exploitant les résultats du **8.** : le facteur $e^{int}$ est continu en fonction de t, borné par 1 et indépendant de r, donc son impact est nul dans la démonstration.

Ainsi, la fonction $v_n$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\int 0F0 - R$ et

$$rv_n''(r) + rv_n'(r) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r, t) e^{-int}\, dt$$

pour tout $0 \leqslant r < R$. On intègre une première fois par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \cdot e^{-int}\, dt = in \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial g}{\partial t} \cdot e^{-int}\, dt$$

car, comme on l'a vu au **9.**,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(r, \pi) = \frac{\partial g}{\partial t}(r, -\pi).$$

On intègre une seconde fois par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \cdot e^{-int}\, dt = -n^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(r, t) e^{-int}\, dt$$

car (pour les mêmes raisons) $g(r, \pi) = g(r, -\pi)$. On en déduit alors que

$$\forall\, 0 \leqslant r < R, \quad r^2 v_n''(r) + rv_n'(r) = n^2 v_n(r).$$

**15.** Commençons par remarquer que

$$0 \leqslant r = e^s < R \iff s < \ell n\, R.$$

Comme $v_n$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, R[$, la fonction

$$w_n = [s \mapsto v_n(e^s)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, \ell n\, R[$ et

$$w_n''(s) = e^{2s} v_n''(e^s) + e^s v_n'(e^s).$$

En substituant $e^s$ à r dans

$$r^2 v_n''(r) + rv_n'(r) - n^2 v_n(r),$$

on aboutit à

$$(e^s)^2 v_n''(e^s) + e^s v_n'(e^s) - n^2 v_n(e^s) = w_n''(s) - n^2 w_n(s)$$

ce qui prouve que $w_n$ est une solution de

$$\forall\, s < \ell n\, R, \quad y''(s) - n^2 y(s) = 0.$$

❧ Si $n = 0$, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, s < \ell n\, R, \quad w_0(s) = A + Bs$$

donc

$$\forall\, 0 < r < R, \quad v_0(r) = A + B \ell n\, r.$$

❧ Si $n \neq 0$, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall\, s < \ell n\, R, \quad w_n(s) = Ae^{ns} + Be^{-ns}$$

donc

$$\forall\, 0 < r < R, \quad v_n(r) = Ar^n + \frac{B}{r^n}.$$

**16.** Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $v_n$ est continue en $r = 0$, donc reste bornée au voisinage de $r = 0$. D'après les expressions trouvées à la question précédente, la constante B doit donc être nulle pour $n = 0$ et pour $n \geqslant 1$, cependant que la constante A doit être nulle pour $n \leqslant -1$.

En conclusion, pour tout entier n (nul ou non), il existe une constante $K_n$ telle que

$$\forall\, 0 < r < R, \quad v_n(r) = K_n r^{|n|}.$$

**17.** Comme f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $D(R)$, pour tout $0 \leqslant r < R$ fixé, la fonction composée

$$t \longmapsto (r \cos t, r \sin t) \longmapsto f(r \cos t, r \sin t) = g(t)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. On peut alors déduire de **7.** que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g) e^{-int}$$

c'est-à-dire (d'après **16.**)

$$f(r \cos t, r \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(r) e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_{-n}(t) e^{-int}$$

pour tout $0 \leqslant r < R$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

**18.** On suppose ici que $R = +\infty$.

Si f est bornée sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\forall\, r \geqslant 0,\ \forall\, t \in [-\pi, \pi], \quad \left|f(r \cos t, r \sin t) e^{-int}\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

et donc

$$\forall\, r \geqslant 0, \quad \left|v_n(r)\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ainsi, chaque fonction $v_n$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Or, d'après **16.**,

$$\forall\, r \geqslant 0, \quad v_n(r) = a_n r^{|n|}.$$

Par conséquent, pour tout $n \neq 0$, il faut que la constante $a_n$ soit nulle et d'après l'expression du **17.**, il reste :

$$\forall\, r \geqslant 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(r \cos t, r \sin t) = a_0$$

ce qui signifie que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

**Partie E. Théorème de D'Alembert-Gauss**

**19.** Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{\partial[(x+iy)^n]}{\partial x} = n(x+iy)^{n-1}$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial[(x+iy)^n]}{\partial y} = in(x+iy)^{n-1}.$$

Ces égalités sont évidentes pour $n = 1$ et peuvent être établies par récurrence sur $n$ au moyen de la formule de Leibniz (dérivation d'un produit).

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P'(x+iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = iP'(x+iy),$$

donc que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = P''(x+iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -P''(x+iy)$$

et finalement que $\Delta f = 0$.

REMARQUE.— On ne peut pas appliquer la règle de la chaîne ici, car il faudrait pour cela considérer $P$ comme une fonction de la variable complexe $z$ et (pour le moment...) on ne sait pas ce que signifie la dérivabilité par rapport à une variable complexe ! (La lecture rigoriste du programme implique de considérer la dérivation des polynômes comme un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ ou comme un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais interdit de la considérer comme un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.)

**20.** On peut appliquer la règle de la chaîne avec les formules établies au **19.** pour calculer le laplacien de $g$. Tout d'abord

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-1}{[f(x,y)]^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = -g^2(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -2g(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - g(x,y)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= 2g(x,y)^3 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - g(x,y)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\end{aligned}$$

(dérivation d'un produit).

Par symétrie,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2g(x,y)^3 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - g(x,y)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Par conséquent,

$$\Delta g = 2g^3(x,y) \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] - g^2(x,y) \cdot \Delta f.$$

Or $f$ est harmonique par **19.**, donc $\Delta f = 0$ et d'autre part, d'après **19.** aussi,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = [P'(x+iy)]^2 + [iP'(x+iy)]^2 = 0$$

donc la fonction $g$ est bien harmonique.

**21.** Comme le polynôme $P$ n'est pas constant, son degré $d$ est supérieur à 1 et

$$P(z) \sim a_d z^d$$

lorsque $z$ tend vers l'infini. En particulier,

$$\lim_{z \to \infty} \left|P(z)\right| = +\infty$$

donc il existe $A > 0$ tel que

$$\forall\, |z| \geqslant A, \quad \left|P(z)\right| \geqslant 1.$$

**22.** Voici un énoncé du Théorème de D'Alembert-Gauss : *Tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *dont le degré est supérieur à* 1 (= polynôme non constant) *possède au moins une racine complexe.*

REMARQUE.— On peut proposer des variantes, plus élaborées mais équivalentes. Par exemple : *Tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *dont le degré est supérieur à* 1 *est scindé dans* $\mathbb{C}[X]$.

❧ Si la fonction polynomiale non constante $f$ ne s'annule nulle part sur $\mathbb{R}^2$, alors **[20.]** la fonction $g$ est harmonique sur $U = \mathbb{R}^2$. Avec le réel $A$ choisi au **21.**, on a

$$\forall\, |z| \geqslant A, \quad \left|g(z)\right| \leqslant 1.$$

Par ailleurs, le disque fermé $[|z| \leqslant A]$ est compact (fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie), donc la fonction continue $g$ est bornée sur ce disque fermé. Ainsi, la fonction $g$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$ et harmonique **[20.]** sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est constante sur $\mathbb{R}^2$ **[18.]**.

Mais comme $f$ est une fonction polynomiale non constante, son inverse $g$ tend vers 0 au voisinage de l'infini. Comme cette fonction ne s'annule jamais, elle ne peut donc pas être constante : la contradiction est manifeste.

On a ainsi démontré que $f$ s'annulait en un point de $\mathbb{R}^2$ au moins et le Théorème de D'Alembert-Gauss est établi.