Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2021/2022

MP

Composition de Mathématiques

Le 23 mars 2022 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

❖ I – Problème ❖

On étudie ici l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

où a et b sont deux applications continues sur $\mathbb{R}$.

On note S^+ (resp. S^-), l'espace vectoriel des fonctions qui vérifient l'équation (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ (resp. sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$).

1. Donner (sans justification) les dimensions des espaces vectoriels S^+ et S^-.

2. On considère l'application linéaire $\varphi : S \to S^+ \times S^-$ définie par

$$\forall\, f \in S, \qquad \varphi(f) = (f_I, f_J)$$

où f_I (resp. f_J) est la restriction de f à l'intervalle I (resp. à l'intervalle J).

Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leqslant 4$.

3. Dans cette question seulement, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$. Autrement dit, l'équation (E) devient :

$$x^2y''(x) + xy'(x) = 0.$$

3. a. Déterminer S^+ et S^-.

3. b. En déduire S et donner (sans entrer dans les détails) la dimension de S.

4. Dans cette question, on suppose que l'équation (E) prend la forme suivante.

$$x^2y''(x) - 6xy'(x) + 12y(x) = 0.$$

4. a. Déterminer deux solutions de la forme $y(x) = x^\alpha$ sur l'intervalle I (où α est un réel). En déduire S^+, puis S^-.

4. b. Déterminer S et donner la dimension de S.

5. Comment choisir les fonctions a et b pour que $\dim S = 0$?

☞ *On pourra s'inspirer de la question précédente.*

❖ II – Problème ❖

On note F, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n, le sous-espace des polynômes de degré inférieur à n.
On rappelle qu'il est possible d'identifier polynôme *à coefficients réels et* application polynomiale *de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

On note w, l'application indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = e^{-x^2}.$$

On note E, l'ensemble des applications continues

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telles que le produit u^2w soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Étant données deux applications u et v appartenant à E, on pose

$$\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\, dx$$

et enfin $\|u\| = \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle}$.

On rappelle enfin la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\forall\, m \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Partie A. Une structure préhilbertienne sur E

1. a. Vérifier l'inégalité suivante.

$$\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad \alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

1. b. En déduire que la quantité $\langle u \,|\, v \rangle$ a un sens, quels que soient u et v dans E.

1. c. Démontrer que E est un espace vectoriel réel.

2. Démontrer que l'application $(u, v) \mapsto \langle u \,|\, v \rangle$ est un produit scalaire sur E.

L'application $u \mapsto \|u\|$ est donc la norme associée à ce produit scalaire.

3. Démontrer que l'espace F est contenu dans E.

On admet que le produit scalaire sur E défini dans l'introduction induit (par restriction) un produit scalaire sur F ainsi que sur chacun des F_n, $n \in \mathbb{N}$.

Partie B. Polynômes d'Hermite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x).$$

Par convention, $H_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Calculer les expressions $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.

5. a. Démontrer la relation suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

5. b. Vérifier les expressions $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$ à l'aide de cette relation.

5. c. Calculer l'expression $H_4(x)$.

5. d. Déduire enfin de cette relation que H_n est un polynôme de degré n, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

On précisera le coefficient dominant de H_n.

6. Démontrer la relation suivante.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

Que peut-on en déduire, en termes de parité, sur l'application H_n ?

Partie C. Interprétation hilbertienne des polynômes d'Hermite

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de F_n.

8. a. Démontrer la relation suivante à l'aide d'une intégration par parties.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in F, \qquad \langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle = \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle.$$

8. b. En déduire que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, P \in F_{n-1}, \qquad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = 0.$$

8. c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur F.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

9. a. Démontrer que $\|H_n\|^2 = \langle\, H_n^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle$.

9. b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie D. Un endomorphisme symétrique

> *On notera* Id_F, *l'identité sur* F.
> *On note* f, g *et* h, *les applications de* F *dans* F *définies par*
>
> $$\forall\, P \in F, \qquad \begin{aligned} f(P) &= -P'' + 2XP' + P,\\ g(P) &= 2XP - P',\\ h(P) &= P'. \end{aligned}$$
>
> *Ainsi, par exemple,*
>
> $$g(P)(x) = 2xP(x) - P'(x)$$
>
> *pour tout* $P \in F$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$.

10. Démontrer que f est un endomorphisme de F.

11. a. Établir que

$$g \circ h = f - \mathrm{Id}_F \quad \text{et que} \quad h \circ g = f + \mathrm{Id}_F\,.$$

11. b. En déduire que

$$f \circ g - g \circ f = 2g.$$

12. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in F$ tels que $f(P) = \lambda P$. Démontrer que

$$f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)g(P).$$

13. a. Calculer $f(H_0)$.

13. b. Calculer $g(H_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(H_k) = (2k+1)H_k.$$

14. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer la relation suivante.

$$\forall\, (P,Q) \in F^2, \qquad \langle\, P' \,|\, Q' \,\rangle = \langle\, f(P) \,|\, Q \,\rangle - \langle\, P \,|\, Q \,\rangle$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$.

15. a. Démontrer que $f(P) \in F_n$ pour tout $P \in F_n$.

> *On notera* f_n, *l'endomorphisme de* F_n *induit par restriction de* f *à* F_n.

15. b. Démontrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

15. c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n.

Partie E. Quelques fonctions exponentielles

> *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on considère l'application* $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_a(x) = e^{ax}.$$

16. Démontrer que $\varphi_a \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

17. Démontrer que

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle\, \varphi_a \,|\, \varphi_b \,\rangle = e^{[(a+b)/2]^2}.$$

18. Déterminer la nature de la série

$$\sum \|\varphi_{\sqrt{\ell n\, n}}\|^{-2}.$$

19. Démontrer que la série

$$\sum \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$$

converge et calculer sa somme.

Partie F. Application aux probabilités

> *On considère la fonction* Φ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*
>
> $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$
>
> *et les fonctions* G *et* K *définies sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*
>
> $$\forall\, x > 0, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right)\frac{e^{-x^2}}{2} \quad \textit{et} \quad K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

20. Démontrer que Φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

21. a. Déterminer les limites au voisinage de $+\infty$ des fonctions Φ, G et K.

21. b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

21. c. En déduire l'encadrement suivant.

$$\forall\, x > 0, \qquad G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$$

21. d. Démontrer que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

22. Soit $c > 0$. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x) - \Phi(x+c)}{\Phi(x)} = 1.$$

> *Ce résultat traduit le fait que, pour une variable aléatoire* X *suivant la loi de Gauss, la probabilité conditionnelle*
>
> $$\mathbf{P}(X \leqslant x + c \mid X > x)$$
>
> *tend vers* 1 *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

Solution I ❀ Équations différentielles

1. $\dim S^+ = \dim S^- = 2$

REMARQUE.— Sur les intervalles I et J, l'équation (E) peut être écrite sous la forme d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus et sous forme résoluble :

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x)/x^2 & -a(x)/x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}.$$

Comme, sur cette écriture, l'espace des phases est un plan vectoriel, alors l'espace des solutions est lui aussi un plan vectoriel.

2. Soit $f \in S$, un vecteur du noyau de φ. Alors les restrictions f_I et f_J sont identiquement nulles :

$$\forall\, x < 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0, \quad f(x) = 0.$$

Comme f est continue en 0, on en déduit que $f(0) = 0$ et donc que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

Ainsi, le noyau de φ est réduit au vecteur nul.

REMARQUE.— Inutile de vérifier que φ est bien définie de S dans $S^+ \times S^-$ et linéaire, on fait confiance à l'énoncé ! Il est cependant nécessaire de se poser la question et raisonnable de prendre quelques instants pour s'assurer qu'il n'y a pas de difficulté cachée.

❧ On a ainsi démontré que φ était injective. D'après le Théorème du rang,

$$\dim S = \dim \operatorname{Im} f$$

et comme $\operatorname{Im} f \subset S^+ \times S^-$, on en déduit que

$$\dim S \leqslant \dim(S^+ \times S^-) = \dim S^+ + \dim S^- = 4.$$

3. a. Il s'agit en fait d'une équation du *premier* ordre en $z(x) = y'(x)$.

❧ Une fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ sur I appartient à S^+ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in I, \quad xz'(x) + z(x) = 0.$$

Ainsi, y appartient à S^+ si, et seulement si, il existe un réel λ_+ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = \frac{\lambda_+}{x}.$$

Autrement dit, y appartient à S^+ si, et seulement si, il existe deux réels λ_+ et μ_+ tels que

$$\forall\, x \in I, \quad y(x) = \lambda_+ \ln x + \mu_+.$$

❧ De la même manière, une fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ appartient à S^- si, et seulement si, il existe deux réels λ_- et μ_- tels que

$$\forall\, x \in J, \quad y(x) = \lambda_- \ln(-x) + \mu_-.$$

3. b. Si $y \in S$, alors $y_I \in S^+$ et $y_J \in S^-$, donc il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \forall\, x < 0, & y(x) = a \ln(-x) + b \\ \forall\, x > 0, & y(x) = c \ln x + d. \end{cases}$$

Or y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue en $x = 0$.

Il faut donc d'une part que

$$a = c = 0$$

(pour que y admette une limite finie) et d'autre part que

$$b = d$$

(pour que la limite à gauche et la limite à droite coïncident en $x = 0$).

❧ Réciproquement, il est clair que toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est une solution de (E) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

❧ L'espace vectoriel S est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et

$$\dim S = 1.$$

4. a. L'application $y = [x \mapsto x^\alpha]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est une solution de (E) sur I si, et seulement si,

$$\forall\, x > 0, \quad \big[\alpha(\alpha - 1) - 6\alpha + 12\big] \cdot x^\alpha = 0$$

c'est-à-dire si $\alpha = 3$ ou $\alpha = 4$.

Comme $\dim S^+ = 2$ et que les fonctions $\big[x \mapsto x^3\big]$ et $\big[x \mapsto x^4\big]$ ne sont pas proportionnelles, on en déduit que

$$S^+ = \operatorname{Vect}\big(\big[x \mapsto x^3\big], \big[x \mapsto x^4\big]\big).$$

❧ Comme les exposants trouvés précédemment sont entiers, il est clair que y appartient à S^- si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in J, \quad y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^4.$$

4. b. D'après la question précédente, si $y \in S$, alors il existe quatre réels a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} \forall\, x \in J, & y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^4 \\ \forall\, x \in I, & y(x) = c \cdot x^3 + d \cdot x^4. \end{cases}$$

Réciproquement, quels que soient les réels a, b, c et d, si $y(0) = 0$, si

$$\forall\, x \in J, \quad y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^4$$

et si

$$\forall\, x \in I, \quad y(x) = c \cdot x^3 + d \cdot x^4,$$

alors y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ (en tant qu'application polynomiale) et comme les développements limités à l'ordre 2 coïncident en $x = 0$, on en déduit que y est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Il est clair, d'après la question précédente, que y est alors solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a ainsi décrit les vecteurs de S, ce qui prouve que

$$\dim S = 4.$$

5. On cherche une équation analogue admettant sur I et sur J des solutions $[x \mapsto x^\alpha]$ avec $\alpha < 0$: de la sorte, on sera dans l'impossibilité de raccorder les solutions de part et d'autre de l'origine.

Si $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$, alors

$$0 = \alpha^2 + 3\alpha + 2 = \alpha(\alpha - 1) + 4\alpha + 2.$$

Les calculs de la question précédente montrent que les solutions de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$$

sont de la forme

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$$

sur I et sur J.

Pour qu'une solution soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle doit au moins rester bornée au voisinage de $x = 0$ (par continuité). Il faut donc qu'elle soit identiquement nulle sur I et sur J et par conséquent identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Avec $a(x) = 4x$ et $b(x) = 2$, l'espace S des solutions sur $\mathbb{R}$ est réduit au vecteur nul.

Solution II ❀ EM Lyon 2008 - Maths I - S

Partie A. Une structure préhilbertienne sur E

1. a. Il suffit de remarquer que

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \alpha\beta = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \geqslant 0,$$

quels que soient les réels α et β (positifs ou non).

1. b. Soient u et v dans E.

Le produit $u.v.w$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|u(x).v(x).w(x)\right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot u^2(x).w(x) + \frac{1}{2} \cdot v^2(x).w(x).$$

Par hypothèse, les fonctions $u^2.w$ et $v^2.w$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ donc, par combinaison linéaire, le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, par comparaison, le produit $u.v.w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, l'expression $\langle\, u \,|\, v \,\rangle$ a bien un sens.

1. c. L'ensemble E est contenu dans l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que l'application identiquement nulle ω est continue et que le produit $\omega^2.w = \omega$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Enfin, si u et v appartiennent à E alors, pour tout réel λ, la combinaison linéaire $\lambda \cdot u + v$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après **[1.b.]**,

$$(\lambda \cdot u + v)^2 \cdot w = \lambda^2 \cdot u^2 \cdot w + v^2 \cdot w + 2\lambda \cdot u \cdot v \cdot w$$

est une combinaison linéaire d'applications intégrables sur $\mathbb{R}$, donc $\lambda \cdot u + v$ appartient bien à E.

Cela prouve que E est un espace vectoriel réel, en tant que sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. On sait **[1.c.]** que E est un espace vectoriel et **[1.b.]** que $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

L'application $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$ est évidemment bilinéaire et symétrique sur $E \times E$.

Pour tout $u \in E$, il est clair que $\langle\, u \,|\, u \,\rangle \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive).

Enfin, si $\langle\, u \,|\, u \,\rangle = 0$, alors $u^2 \cdot w$ est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ dont l'intégrale est nulle. Par conséquent,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u^2(x).w(x) = 0$$

et comme $w(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = 0.$$

Ainsi, $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur $E \times E$, c'est-à-dire un produit scalaire sur E.

3. Soit $u \in F$: l'application u est évidement continue sur $\mathbb{R}$ et il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$u(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^d),$$

donc

$$u^2(x).w(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^{2d} e^{-x^2}) \underset{x \to \pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

car

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x|^n e^{-x^2} = \exp\big[-x^2 + n\,\ell n|x|\big] \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$$

par croissances comparées de x^2 et de $\ell n\, x$.

L'application $u^2 \cdot w$ est donc intégrable aux voisinages de $\pm\infty$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que $F \subset E$.

Partie B. Polynômes d'Hermite

4. On calcule successivement $w'(x)$, $w''(x)$ et $w^{(3)}(x)$ (les calculs doivent figurer sur la copie) et on en déduit que

$$H_1 = 2X,$$
$$H_2 = 4X^2 - 2,$$
$$H_3 = 8X^3 - 12X.$$

5. a. On part de la définition de H_{n+1} : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{x^2} w^{(n+1)}(x) \\
&= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d[w^{(n)}(x)]}{dx} \\
&= (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d}{dx}\big[(-1)^n e^{-x^2} H_n(x)\big] \\
&= -e^{x^2}\big[-2xe^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H_n'(x)\big] \\
&\qquad\qquad \text{(dérivation d'un produit)} \\
&= 2xH_n(x) - H_n'(x).
\end{aligned}$$

5. b. On part de $H_0 = 1$ (convention indiquée par l'énoncé) et on déduit H_1, H_2 et H_3 de proche en proche. Les calculs doivent figurer sur la copie et, bien entendu, il faut retrouver les résultats obtenus plus haut !

5. c. Comme $H_3 = 8X^3 - 12X$,

$$H_4 = 2X(8X^3 - 12X) - (24X^2 - 12) = 16X^4 - 48X^2 + 12.$$

5. d. D'après les calculs précédents, on conjecture que H_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est égal à 2^n : cette conjecture est validée pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.

HR : On suppose que notre conjecture est vraie pour un entier $n \geqslant 4$.

D'après la relation de récurrence **[5.a.]**,

$$H_{n+1} = 2X(2^n X^n + \cdots) - (\cdots)$$

(où les $\cdots$ indiquent des termes dont le degré est strictement inférieur à n) et par conséquent

$$H_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + \cdots$$

(où les $\cdots$ indiquent cette fois des termes dont le degré est inférieur à n). Cela prouve que $\deg H_{n+1} = n+1$ et que le coefficient dominant de H_{n+1} est égal à 2^{n+1}.

Notre conjecture est ainsi démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. La fonction w est paire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad w(-x) = w(x).$$

En dérivant n fois, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \quad (-1)^n w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x).$$

Par définition de H_n, on en déduit que

$$\begin{aligned} H_n(-x) &= (-1)^n e^{(-x)^2}.w^{(n)}(-x) \\ &= e^{x^2} w^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction H_n est paire (resp. impaire) si, et seulement si, l'entier n est pair (resp. impair).

Partie C. Interprétation hilbertienne des polynômes d'Hermite

7. D'après **[5.d.]**,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \deg H_k = k$$

donc $H_k \in F_n$ et comme la famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est échelonnée en degré, c'est une famille libre.

En tant que famille libre de $(n+1)$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $(n+1)$, c'est une base.

8. a. Par définition du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot (-1)^n w^{(n)}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant intégrer par parties.

D'après **[3.]**,

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) \cdot (-1)^n w^{(n-1)}(x) = 0$$

et, par définition de H_{n-1},

$$P'(x) \cdot w^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} P'(x) H_{n-1}(x) w(x).$$

Or $P' \in F$ et $H_{n-1} \in F$, donc le produit $P'.H_{n-1}.w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle &= 0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n-1} P'(x).H_{n-1}(x).w(x)\, dx \\ &= \langle\, P' \,|\, H_{n-1} \,\rangle. \end{aligned}$$

8. b. On déduit du résultat précédent que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P^{(k)} \,|\, H_{n-k} \,\rangle$$

et donc en particulier que

$$\langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle.$$

Si $\deg P < n$, alors $P^{(n)} = 0$ et donc $\langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = 0$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\forall\, P \in F_{n-1}, \qquad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = 0.$$

8. c. Soient $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Comme $i < j$ et que i et j sont *entiers*, alors $i \leqslant j-1$ et donc

$$H_i \in F_i \subset F_{j-1}.$$

D'après la question précédente, $\langle\, H_i \,|\, H_j \,\rangle = 0$.

La famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc orthogonale pour le produit scalaire $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$.

9. a. D'après **[8.b.]**,

$$\forall\, P \in F, \quad \langle\, P \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, P^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle.$$

En particulier,

$$\|H_n\|^2 = \langle\, H_n \,|\, H_n \,\rangle = \langle\, H_n^{(n)} \,|\, H_0 \,\rangle.$$

9. b. Par **[5.d.]**, $H_n^{(n)} = 2^n.n!$ et donc

$$\|H_n\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n.n! \cdot 1 \cdot e^{-x^2}\, dx = 2^n.n!.$$

Ainsi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|H_n\| = \sqrt{2^n.n!}.$$

Partie D. Un endomorphisme symétrique

10. Il est clair que, quel que soit le polynôme $P \in F$, l'expression $f(P)$ est un polynôme. On vérifie sans peine que f est bien linéaire.

L'application f est donc un endomorphisme de F.

11. a. Comme $h(P) = P'$, alors

$$\begin{aligned} g\big(h(P)\big) &= g(P') = 2XP' - P'' = f(P) - P \\ &= (f - I)(P). \end{aligned}$$

De même, comme $g(P) = 2XP - P'$, alors

$$\begin{aligned} h\big(g(P)\big) &= h(2XP - P') = 2P + 2XP' - P'' = P + f(P) \\ &= (I + f)(P). \end{aligned}$$

Comme ces relations sont vraies pour tout $P \in F$, on en déduit que

$$g \circ h = f - \mathrm{Id}_F \quad \text{et que} \quad h \circ g = f + \mathrm{Id}_F.$$

11. b. D'après la question précédente,

$$f = I + g \circ h = h \circ g - I.$$

En composant à droite par g la première expression de f et à gauche par g la seconde expression, on en déduit que

$$f \circ g = g + g \circ h \circ g \quad \text{et} \quad g \circ f = g \circ h \circ g - g$$

et donc que
$$f \circ g - g \circ f = 2g.$$
12. Si $f(P) = \lambda \cdot P$, on déduit de la relation précédente que
$$\begin{aligned} f\big(g(P)\big) &= g\big(f(P)\big) + 2g(P) \\ &= g(\lambda P) + 2g(P) = (\lambda + 2) \cdot g(P) \end{aligned}$$
par linéarité de g.
13. a. Comme $H_0 = 1$, on a $f(H_0) = 1$ (calcul immédiat).
13. b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$g(H_k) = 2XH_k - H'_k = H_{k+1}$$
(par définition de H_{k+1}).
❧ D'après **[11.b.]**, pour tout $k \geqslant 1$,
$$(f \circ g)(H_{k-1}) - (g \circ f)(H_{k-1}) = 2g(H_{k-1}).$$
Or $g(H_{k-1}) = H_k$, donc
$$f(H_k) - g\big(f(H_{k-1})\big) = 2H_k. \qquad (\star)$$
❧ **HR :** Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$f(H_n) = (2n+1)H_n.$$
D'après **[13.a.]**, notre hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$.

Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1 \in \mathbb{N}^*$ et on déduit de la relation $(\star)$ que
$$\begin{aligned} f(H_{n+1}) &= 2H_{n+1} + g\big(f(H_n)\big) \\ &\overset{[HR]}{=} 2H_{n+1} + (2n+1)g(H_n) \\ &= (2n+3)H_n \end{aligned}$$
ce qui prouve que l'hypothèse de récurrence est encore vérifiée pour $n+1$.

On a ainsi démontré que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f(H_n) = (2n+1)H_n.$$
14. Par définition de f et du produit scalaire,
$$\begin{aligned} &\langle f(P) \,|\, Q \rangle - \langle P \,|\, Q \rangle \\ &= \langle -P'' + 2XP' \,|\, Q \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x).[-P''(x) + 2xP'(x)].w(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x).\frac{d[-P'(x).e^{-x^2}]}{dx} \cdot dx. \end{aligned}$$
L'intégration par parties s'impose d'elle-même !

Par croissances comparées des fonctions polynomiales et de e^{-x^2},
$$\lim_{x \to \pm\infty} Q(x)P'(x)e^{-x^2} = 0.$$
Comme $P' \in F$ et $Q' \in F$, le produit $Q'P'w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ **[3.]**. Par conséquent,
$$\begin{aligned} \langle f(P) \,|\, Q \rangle - \langle P \,|\, Q \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x)P'(x)e^{-x^2}\, dx \\ &= \langle P' \,|\, Q' \rangle. \end{aligned}$$
15. a. Pour $P \in F_n$, on a $\deg P \leqslant n$, donc
$$\deg(XP') = 1 + \deg P' \leqslant 1 + (n-1) = n$$
et
$$\deg P'' \leqslant \deg P - 2 \leqslant n.$$
Par conséquent, le degré du polynôme
$$f(P) = -P'' + 2XP' + P$$
est inférieur ou égal à n et $f(P) \in F_n$.

Autrement dit, le sous-espace F_n de F est stable par l'endomorphisme f, ce qui prouve l'existence de l'endomorphisme $f_n \in L(F_n)$ induit par restriction de f à F_n.
15. b. D'après **[14.]**,
$$\langle f(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, Q \rangle + \langle P' \,|\, Q' \rangle.$$
Comme le second membre est une expression symétrique en P et Q, on en déduit que
$$\forall\, P, Q \in F, \quad \langle f(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, f(Q) \rangle$$
et donc que f est un endomorphisme symétrique de F.

Comme chaque sous-espace F_n est stable par f, l'endomorphisme f_n induit par restriction de f à F_n est également un endomorphisme symétrique de F_n.
15. c. Par **[13.b.]**,
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad f(H_k) = (2k+1)H_k$$
et comme $H_k \neq 0$, on en déduit que chaque polynôme H_k est un vecteur propre de f_n (associé à la valeur propre $(2k+1)$).

D'après **[7.]** et **[8.c.]**, la famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de F_n.

Par conséquent, la famille
$$\Big(\frac{H_k}{\|H_k\|}\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$$
est une base orthonormée de F_n constituée de vecteurs propres de f_n. (On a calculé $\|H_k\|$ au **[9.b.]**, mais pour le moment il est inutile d'utiliser cette valeur.)

REMARQUE.— Le Théorème spectral affirme qu'il existe une base orthonormée de F_n constituée de vecteurs propres de f_n, mais ne dit pas comment calculer explicitement une telle base. Il est donc inutile ici !

Partie E. Quelques fonctions exponentielles

16. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Le produit $\varphi_a^2.w$ est bien une application continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad x^2. \exp(2ax - x^2) = \exp(-x^2 + 2ax + 2\,\ell n|x|)$$
et on en déduit, par croissances comparées de $\ell n|x|$ et des puissances de x que
$$\varphi_a^2(x).w(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big),$$
ce qui prouve que $\varphi_a^2.w$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit : $\varphi_a \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

17. D'après **[1.b.]** et la question précédente, $\langle \varphi_a \mid \varphi_b \rangle$ est bien défini.

$$\begin{aligned}\langle \varphi_a \mid \varphi_b \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+b)x-x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}.e^{m^2}\,dx \quad (\text{avec } m = \tfrac{a+b}{2}) \\ &= \exp\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\end{aligned}$$

d'après le rappel du préambule.

18. D'après **[17.]**,

$$\|\varphi_{\sqrt{\ell n\, n}}\|^2 = \exp(\sqrt{\ell n\, n})^2 = n$$

donc la série $\sum \|\varphi_{\sqrt{\ell n\, n}}\|^{-2}$ diverge (série harmonique).

19. Toujours d'après **[17.]**,

$$\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^2 = \exp(\sqrt{n}^2) = e^n.$$

En tant que série géométrique de raison $0 < e^{-1} < n$, la série $\sum \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$ est (absolument) convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$$

REMARQUE.— L'énoncé est ambigu : on ne sait pas exactement quel est le premier terme de cette somme. On peut choisir $n = 0$ (comme je l'ai fait) ou n'importe quel autre entier : il suffit que la somme donnée soit exacte pour que la réponse soit considérée comme correcte.

Partie F. Application aux probabilités

20. Le polynôme $H_0 = 1$ appartient à F, donc **[3.]** l'intégrale généralisée

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après la relation de Chasles,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (\dagger)$$

et comme la fonction $\left[t \mapsto e^{-t^2}\right]$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on déduit du Théorème fondamental de l'Analyse que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = -e^{-x^2}.$$

Il est alors clair que Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

21. a. Par définition de l'intégrale généralisée,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

et cette limite est *réelle* (puisque l'intégrale généralisée est convergente).

On déduit alors de la relation (†) que

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0.$$

REMARQUE.— Ce dernier calcul n'aurait pas de sens dans le cas où l'intégrale généralisée serait divergente...

❧ Il est par ailleurs clair que

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} K(x) = 0$$

(pas de forme indéterminée en vue !).

21. b. D'après **[20.]**, les différences $G - \Phi$ et $\Phi - K$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x > 0$,

$$G'(x) - \Phi'(x) = \frac{3}{2x^4}e^{-x^2} > 0$$
$$\Phi'(x) - K'(x) = \frac{1}{2x^2}e^{-x^2} > 0$$

donc les deux fonctions sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$.

21. c. Ces deux fonctions sont croissantes sur $]0, +\infty[$ et, d'après **[21.a.]**, elles tendent vers 0 au voisinage de $+\infty$, donc elles sont (strictement) négatives sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent,

$$\forall\, x > 0, \qquad G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$$

(et ce sont même des inégalités strictes en fait).

21. d. Il est clair que $G(x) \sim K(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par encadrement, on en déduit que $\Phi(x) \sim K(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

REMARQUE.— On **doit** suivre l'énoncé. Mais on peut aussi réfléchir un peu...

Pour tout $x > 0$,

$$K'(x) = -e^{-x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2}$$

donc (en suivant la démarche du **[20.]**)

$$K(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} + \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt.$$

Les fonctions w et

$$w_0 = \left[t \mapsto e^{-t^2} + \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\right]$$

sont positives sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrables et équivalentes au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, on sait que

$$\int_x^{+\infty} w(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} w_0(t)\,dt = K(x).$$

22. On a démontré que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\Phi(x)}{e^{-x^2}} = 1.$$

Par composition de limites, on en déduit que, pour tout $c > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+c)\Phi(x+c)}{e^{-(x+c)^2}} = 1.$$

On en déduit (quotient d'équivalents) que

$$\frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-2xc-c^2}}{2(x+c)}$$

et donc que, par croissances comparées, ce quotient tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Il est alors clair que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x) - \Phi(x+c)}{\Phi(x)} = 1.$$