Équations différentielles linéaires [46.5]

On étudie ici le système différentiel

$$\begin{cases} x' = \ \ 2x - \ \ y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = \ \ 4x - 2y + 2z \end{cases}.$$

Ce système se traduit sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et se résout habituellement en trigonalisant la matrice A.

Nous allons présenter trois méthodes :

— la première est une trigonalisation rapide, le but étant de résoudre au plus vite le système différentiel ;

— la seconde est une trigonalisation poussée, le but étant d'obtenir la **forme normale de Jordan** de A (ce qui fait passer la résolution du système différentiel au second plan) ;

— la troisième méthode se donne pour but de calculer la matrice $\exp(tA)$ le plus vite possible.

❧ **Analyse de la matrice** A

On vérifie sans peine que

— le polynôme caractéristique de A est le polynôme $X^2(X+1)$;

— le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A + I_3)$ est la droite dirigée par $(1, -1, -2)$;

— le sous-espace propre $\operatorname{Ker} A$ est la droite dirigée par $(1, 2, 0)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ($1 + 1 = 2$) est strictement inférieure à la dimension de l'espace (3), la matrice A n'est pas diagonalisable.

Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, cette matrice est trigonalisable. En tenant compte de son spectre et des multiplicités respectives de ses deux valeurs propres, la matrice A est donc semblable à une matrice T de la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, puisqu'on a caractérisé les deux sous-espaces propres, dès que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ -1 & 2 & * \\ -2 & 0 & * \end{pmatrix}$$

est inversible, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, la première (resp. deuxième) colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1 (resp. 0), ce qui détermine les deux premières colonnes de $P^{-1}AP$.

D'autre part, les matrices A et $P^{-1}AP$ sont semblables, donc leurs traces sont égales, c'est pourquoi le troisième coefficient diagonal de $P^{-1}AP$ est égal à 0.

Il ne reste plus qu'à choisir la troisième colonne de P.

❧ **Première méthode**

Quelle que soit la manière de compléter la matrice P, on sait que la matrice $P^{-1}AP$ sera nécessairement triangulaire et cela suffit pour rendre facile la résolution du système différentiel. On n'a donc plus qu'une seule contrainte : choisir une troisième colonne telle que la matrice P soit inversible.

Le choix le plus simple est ici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *Quels sont les autres choix possibles ? En fait, il suffit que la troisième colonne n'appartienne pas au plan engendré par les deux premières colonnes.*

On peut trouver les coefficients d'une équation cartésienne de ce plan en calculant le produit vectoriel des deux premières colonnes. Il suffira alors de choisir une colonne qui ne vérifie pas *cette équation cartésienne.*

Mais on peut aussi comprendre qu'en choisissant une colonne au hasard *dans $\mathbb{R}^3$, la probabilité pour que cette colonne appartienne à un plan vectoriel donné est extrêmement faible : si on a un tempérament joueur, on pourra choisir la troisième colonne au hasard.*

Pour déterminer la troisième colonne de $P^{-1}AP$, on revient à la définition de la matrice d'une application linéaire :

$$A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t),$$

la résolution du système $X'(t) = A.X(t)$ équivaut à la résolution du système

$$Y'(t) = (P^{-1}AP).Y(t),$$

c'est-à-dire du système

$$\begin{cases} u' = -u - 2w \\ v' = \phantom{-u - {}} 4w \\ w' = 0 \end{cases}.$$

Le triplet (u, v, w) est donc une solution si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2, K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = K_1 e^{-t} - 2K_3, \\ v(t) = K_2 + 4K_3 t, \\ w(t) = K_3. \end{cases}$$

On en déduit que le triplet (x, y, z) est une solution du système initial si, et seulement si, il existe trois constantes réelles K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} - 2K_3 \\ K_2 + 4K_3 t \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

❧ **Deuxième méthode**

D'après un théorème de Camille Jordan (1838-1922), la matrice A est semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est à la fois diagonale par blocs et triangulaire.

Analysons cette matrice T : en considérant qu'elle représente l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $A = \mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$ dans une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il faut que :

Première colonne • ε_1 soit un vecteur propre de f associé à -1 ;

Deuxième colonne • ε_2 soit un vecteur propre de f associé à 0, c'est-à-dire un vecteur du noyau de f ;

Troisième colonne • $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$ et donc que ε_3 appartienne au noyau de f^2 sans appartenir au noyau de f (il faut que $\varepsilon_2 \neq 0$, c'est un vecteur de base).

On voit clairement que le rang de la matrice

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

est égal à 1. Chaque ligne de cette matrice nous donne donc une équation cartésienne du noyau de A^2 :

$$\operatorname{Ker} A^2 = [2x - y + z = 0].$$

On choisit un vecteur dans $\operatorname{Ker} A^2$ mais pas dans $\operatorname{Ker} A$, c'est-à-dire pas proportionnel à $(1, 2, 0)$: prenons par exemple $\varepsilon_3 = (0, 1, 1)$ et posons alors

$$\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) = A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *Quel que soit le choix de $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker} f^2$, le vecteur $f(\varepsilon_3)$ appartient au noyau de f et est donc proportionnel à $(1, 2, 0)$ (pas forcément égal à $(1, 2, 0)$ comme c'est le cas ici) : en posant $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3)$, on est sûr que ε_2 sera un vecteur propre de A associé à 0.*

La seule contrainte à respecter est donc de choisir ε_3 dans $\operatorname{Ker} f^2 \setminus \operatorname{Ker} f$ (pour que $\varepsilon_2 \neq 0$!).

En posant cette fois

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système triangulaire qui s'en déduit n'est pas plus simple que le précédent système triangulaire — pas plus compliqué non plus !

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = \quad w \\ w' = \quad 0 \end{cases}$$

❧ **Variante de la deuxième méthode**

Comme le polynôme $(X+1)X^2$ est un polynôme annulateur de A et que les facteurs $(X+1)$ et X^2 sont premiers entre eux, on déduit du Théorème de décomposition des noyaux que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A + I) \oplus \operatorname{Ker} A^2.$$

Les deux sous-espaces $\operatorname{Ker}(A+I)$ et $\operatorname{Ker} A^2$ sont stables par A (ce sont tous les deux le noyau d'un polynôme en A). Par conséquent, en choisissant une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition en somme directe, on trouvera une matrice semblable à A et diagonale par blocs.

On choisit $\varepsilon_1 = (1, -1, -2)$ comme vecteur directeur de la droite $\operatorname{Ker}(A + I)$ (c'est le choix qui *me* paraît le plus simple — mais c'est une question de goût).

Il reste à choisir une base de $\operatorname{Ker} A^2 = [2x - y + z = 0]$: le plus simple est de choisir pour commencer un vecteur de $\operatorname{Ker} A$ (= vecteur propre associé à 0)

$$\varepsilon_2 = (1, 2, 0)$$

et de compléter ensuite comme on veut :

$$\varepsilon_3 = (1, 1, -1).$$

Par choix de ε_2, on a $f(\varepsilon_2) = 0$ et comme ε_3 appartient au sous-espace stable $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il existe deux scalaires a et b tels que

$$f(\varepsilon_3) = a \cdot \varepsilon_2 + b \cdot \varepsilon_3.$$

Effectivement,

$$A.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}=(-1)\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3.$$

Bref, dans cette nouvelle base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, la matrice de f est

$$T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et on peut terminer la résolution comme plus haut.

✍ *J'ai déjà expliqué plus haut pourquoi on savait (avant de faire les calculs !) que b serait nul et que $f(\varepsilon_3)$ serait proportionnel à ε_2. Une seconde lecture ne peut pas faire de mal !*

❧ **Troisième méthode**

Pour calculer $\exp(tA)$, il faut calculer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour aller vite, il faut éviter de changer de base.

On connaît un polynôme annulateur de A : $(X+1)X^2$, qui nous donne la relation

$$A^3=-A^2.$$

✍ *C'est le polynôme caractéristique, mais c'est aussi le polynôme minimal : pourquoi ?*

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, n\geqslant 2,\quad A^n=(-1)^nA^2$$

et donc que, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\exp(tA)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\cdot A^n&=I_3+t\cdot A+\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\right)\cdot A^2\\&=I_3+t\cdot A+\left(e^{-t}-1+t\right)\cdot A^2\\&=(I_3-A^2)+t\cdot(A+A^2)+e^{-t}\cdot A^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad X(t)=(I_3-A^2).X(0)+t\cdot(A+A^2).X(0)+e^{-t}\cdot A^2.X(0)$$

ce qui nous donne la solution du système différentiel associée à la condition initiale

$$\big(t_0=0,\ X_0=X(0)\big).$$