❧ Il est clair que $\dim F = 1$ (sous-espace engendré par un vecteur non nul, c'est donc une droite) et que $\dim G = 2$ (noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan) et donc que

$$\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3.$$

Le vecteur $(0, 1, 1)$, qui dirige F, ne vérifie pas l'équation qui caractérise G $(0 - 3 + 2 = -1 \neq 0)$, donc $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent, F et G sont bien supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

❧ Comme

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le vecteur $\boldsymbol{e}_1 = (0, 1, 1)$ qui dirige F est un vecteur propre de u, donc la droite F est bien stable par u.

❧ Les vecteurs $\mathbf{f}_1 = (3, 1, 0)$ et $\mathbf{f}_2 = (-2, 0, 1)$ ne sont pas proportionnels, donc le couple $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ est une famille libre. Ces deux vecteurs vérifient l'équation du plan G, donc le couple $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ est une base de G (famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux).

On calcule dans la base canonique :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on constate que les deux vecteurs $u(\mathbf{f}_1)$ et $u(\mathbf{f}_2)$ vérifient l'équation de G. Par conséquent, l'image par u d'une base de G est contenue dans G, ce qui prouve que G est stable par u.

REMARQUE.— On a suivi une méthode élémentaire pour vérifier que G était stable par u. Comme G est un hyperplan, on peut être plus intelligent.

Remarquons pour commencer que la colonne

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

représente un vecteur $\mathbf{x}$ de G dans la base canonique si, et seulement si,

$$x - 3y + 2z = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}}_{L_0} \cdot X = 0.$$

Prenons alors $\mathbf{x} \in G$ et posons $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$. Dans la base canonique, ces vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont représentés par les colonnes X et AX. On sait par hypothèse que $L_0 X = 0$ et on constate alors que

$$L_0(AX) = (L_0 A)X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} X = L_0 X = 0$$

ce qui signifie que $\mathbf{y} \in G$ et donc que G est stable par u.

Si on prend un peu de recul en essayant de voir ce que le calcul précédent a de général, on constate que : si la colonne ${}^t L_0$ est un vecteur propre de la transposée ${}^t A$, alors il existe λ tel que $L_0 A = \lambda L_0$ et, dans ces conditions,

$$L_0 X = 0 \implies L_0(AX) = 0$$

ou, autrement dit, l'hyperplan d'équation $L_0 X = 0$ est stable par A.

Ça mérite qu'on s'en souvienne !

❧ On a remarqué que le vecteur $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1)$ qui dirige F était un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Comme F et G sont supplémentaires dans E, en concaténant $(\mathbf{e}_1)$, base de F, avec $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, base de G, on obtient une base $\mathscr{C}$ de E.

Comme les sous-espaces vectoriels F et G sont stables par u, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, comme le vecteur $\mathbf{e}_1$ est un vecteur propre associé à 1,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On a choisi plus haut des vecteurs $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ un peu au hasard. On a peut-être remarqué que $u(\mathbf{f}_1) = 2 \cdot \mathbf{f}_1$. Par conséquent, en prenant $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1$ et $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2$, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

est bien triangulaire.

REMARQUE.— Une fois de plus, le hasard a bien fait les choses. Voyons maintenant comment organiser les choses sans laisser de place pour le hasard !

Pour que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire supérieure :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

il faut que le vecteur $\mathbf{e}_2$ soit un vecteur propre de u associé à a.

De manière analogue, pour que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire inférieure :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

il faut que le vecteur $\mathbf{e}_3$ soit un vecteur propre de u associé à b.

De quelque manière qu'on prenne le problème, il faut donc trouver un vecteur propre de u dans le plan G.

Or la matrice A est triangulaire ! Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux : 1 et 2. Cherchons ses sous-espaces propres.

<u>Sous-espace propre associé à 1 :</u> la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1 et comme

$$C_1 = 0 \qquad C_2 + C_3 = 0$$

le noyau de cette matrice est le plan engendré par les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Le vecteur propre

$$\alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1) = (\alpha, \beta, \beta)$$

appartient à G si, et seulement si, $\alpha - 3\beta + 2\beta = 0$, soit $\alpha = \beta$.

<u>Sous-espace propre associé à 2 :</u> la matrice

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 2 et comme $3C_1 + C_2 = 0$, le noyau de cette matrice est la droite dirigée par le vecteur $(3, 1, 0) \in G$.

C'est encore mieux que ce qu'on attendait ! On a trouvé deux vecteurs propres

$$\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}_3 = (3, 1, 0)$$

dans G, respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2. Avec ce choix de vecteurs, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$ est diagonale :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$